Aanvullende tekst bij hoofdstuk 1

Wortels uit willekeurige getallen

In paragraaf 1.3.5 hebben we het **worteltrekalgoritme** besproken. Dat deden we aan de hand van de relatie tussen de (van tevoren gegeven) oppervlakte van een vierkant en de omtrek ervan (die we wilden berekenen). Als we het worteltrekalgoritme veralgemenen, dan kunnen we het gebruiken om wortels uit *willekeurige* getallen te trekken. Dat wil zeggen: behalve uit kwadraten van hele getallen nu ook uit niet-kwadraten en uit kommagetallen.

Worteltrekken is het omgekeerde van kwadrateren, zoals uitgelegd in paragraaf 1.3.2. Ook is al bekend dat de notatie 6^2 (spreek uit: ‘zes kwadraat’) staat voor 6 × 6, wat gelijk is aan 36. De omgekeerde bewerking, waarbij we uit de uitkomst 36 het oorspronkelijke getal 6 weer willen terugwinnen, schrijven we als $\sqrt{36}$ (spreek uit: ‘wortel 36’). We hebben dus $\sqrt{36} = 6$. (Enkele andere wortels kennen de meeste mensen ook wel uit hun hoofd. Bijvoorbeeld: $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{25} = 5$ en $\sqrt{16} = 4$.)

De context die we gebruiken om het algoritme en de bewerking worteltrekken goed te kunnen begrijpen berust op het achterliggende model: het vierkant (zie ook paragraaf 1.2.2).

Voor wortels uit grotere vierkantsgetallen is het handig een standaardalgoritme te hebben. Vooral als je niet van tevoren weet welk getal er gekwadrateerd is. Voor wortels uit getallen die geen kwadraat zijn van een heel getal en die dus geen ‘mooie’, kommaloze uitkomst geven, is zo’n standaardalgoritme zelfs praktisch onmisbaar.

De context die we gebruiken voor de begripsvorming rond wortels berust op het achterliggende model: het vierkant. In paragraaf 1.3.5 nam deze context de volgende concrete vorm aan: hoe lang moet een touw zijn dat we rond een vierkant veld van 729 m^2 willen spannen? Aan de hand van deze context lieten we zien hoe je worteltrekken systematisch kunt aanpakken. Tegen het einde van de paragraaf zagen we ook nog op welke manier je de voorgaande procedure formeel kon noteren, analoog aan de manier waarop je een staartdeling noteert.

In deze paragraaf volgen we echter de omgekeerde route. Eerst introduceren we op puur formeel niveau het veralgemeende worteltrekalgoritme. En pas daarna laten we aan de hand van de eerder genoemde context zien waarom dat worteltrekalgoritme ook daadwerkelijk werkt. Een sluitend wiskundig bewijs zullen we hiervoor trouwens niet geven, omdat dat eenvoudigweg buiten het bestek van het boek valt. We zijn tevreden wanneer het worteltrekalgoritme naar de mening van de lezer plausibel is.

Om te beginnen, nemen we voor het gemak eerst aan dat we de wortel willen trekken uit een willekeurig heel, positief getal *N*. De formele versie van het worteltrekalgoritme begint met de volgende voorbereidende stap:

uitgeverij coutinho C

1 Werkend van rechts naar links verdeel je *N* zoveel mogelijk in groepjes van twee cijfers. Als *N* een even aantal cijfers heeft, dan kan dat natuurlijk zonder meer. Heeft *N* daarentegen een oneven aantal cijfers, dan zorg je dat het meest linkse groepje één cijfer bevat. Zo worden bijvoorbeeld de getallen 345.843, 13.957, 730 en 13.485.498 als volgt verdeeld:

34 | 58 | 43
1 | 39 | 57
7 | 30
13 | 48 | 54 | 98

Met stap 2 begint het eigenlijke algoritme.

2 Kijk naar het meest linkse groepje. Bepaal nu een heel getal *c kleiner dan 10* zodanig dat het kwadraat ervan zo dicht mogelijk bij het getal voorgesteld door het meest linkse groepje ligt (of er zelfs gelijk aan is), maar er niet boven komt. Trek vervolgens dit kwadraat af van het groepje.
Laten we als voorbeeld, ook voor de volgende stappen, *N* = 74.987.555.321 nemen. (We kiezen dit tamelijk grote getal omdat zo de regelmaat van de stappen beter uitkomt.) Dan krijgen we, nadat we ook de voorbereidende stap hebben uitgevoerd:

7 | 49 | 87 | 55 | 53 | 21	**2**
4	**2 × 2**
3	

Schrijf ergens anders je *c* op (liefst op enige afstand rechts van *N*): in dit geval **2**, want 2 × 2 = 4, terwijl 3 × 3 > 7. Onthoud 2.

3 Trek nu, zoals bij staartdelen, het volgende groepje erbij. We krijgen dan 349. Herinner je daarna van welk getal *c* je in de vorige stap het kwadraat hebt berekend. In ons voorbeeld was dat 2. **Verdubbel dat nu *c***; we krijgen dan 4. Bepaal nu een nieuw cijfer *c* zodanig dat 4*c* × *c* zo dicht mogelijk onder 349 ligt (of eraan gelijk is). Hierbij stelt 4*c* trouwens **niet**, zoals wel in de algebra, 4 × *c* voor, maar eenvoudigweg het getal dat ontstaat door *c* rechts naast 4 te schrijven. Na wat proberen, zien we dat *c* = 7 het cijfer is dat we zoeken, omdat 47 × 7 = 329, terwijl 48 × 8 = 384 te groot is. Trek 329 af van 349. We krijgen dan:

7 | 49 | 87 | 55 | 53 | 21	**27**	
4	**2 × 2**	
3 49		
3 29	**47 × 7**	**(4 = 2 + 2)**
20		

Ten slotte: schrijf naast de 2, die je ergens anders al hebt staan, je nieuwe *c*, namelijk 7, op: **27**. Onthoud 27.

4 Verdubbel 27 tot 54. Trek de volgende groep erbij, zodat we 2087 krijgen. Bepaal nu een cijfer c zodanig dat $54c \times c$ kleiner dan of gelijk aan 2087 is, maar er wel zo dicht mogelijk bij ligt. We vinden $c = 3$. Trek $543 \times 3 = 1629$ van 2087 af. Antwoord: 458. Notatie:

7 | 49 | 87 | 55 | 53 | 21	273	
4	2 × 2	
3 49		
3 29	47 × 7	
20 87		
16 29	543 × 3	(54 = 7 + 47)
4 58		

Voeg de 3 toe aan je lijstje van *c*'s: **273**. Onthoud 273.

5 Herhaal de procedure beschreven in stap 4 net zo lang tot je het meest rechtse groepje hebt gehad. We krijgen dan (en reken dat vooral na!):

7 | 49 | 87 | 55 | 53 | 21	273838	
4	2 × 2	
3 49		
3 29	47 × 7	(4 = 2 + 2)
20 87		
16 29	543 × 3	(54 = 7 + 47)
4 58 55		
4 37 44	5468 × 8	(546 = 3 + 543)
21 11 53		
16 42 89	54.763 × 3	(5476 = 8 × 5468)
4 68 64 21		
4 38 13 44	547.668 × 8	(54766 = 3 + 5763)
30 50 77		

Ons lijstje van *c*'s is uiteindelijk **273838. Dit is het antwoord waar we naar zochten**, afgerond op een heel getal. We hebben dus (bij benadering) . Meer nauwkeurigheid, in de vorm van cijfers achter de komma, kunnen we krijgen door achter N nog een even aantal nullen te plaatsen en gewoon door te gaan met het herhalen van stap 4. Voor ieder paar nullen meer krijg je één decimaal extra in de uitkomst. Vervolgens plaatsen we na de cijferreeks 273838, die we al hebben uitgerekend, een komma in de uitkomst.

6 Controleer het antwoord door het te kwadrateren: $273.838 \times 273.838 = 74.987.250.244$. Dit komt aardig overeen met het oorspronkelijke getal N. Een beter antwoord krijgen we naarmate we meer decimalen van de uitkomst uitrekenen: bijvoorbeeld $273.838,557^2 = 74.987.555.300$.

Hierna volgen nog drie iets kleinere voorbeelden, zonder verder commentaar. Ook nu is het weer aan te raden ze tot in detail na te rekenen. We berekenen achtereenvolgens $\sqrt{2304}$, $\sqrt{15.658}$ (tweemaal) en $\sqrt{17{,}7}$.

```
23 | 04        48
16             4 × 4
 7  04
 7  04         88 × 8      (8 = 2 + 4)
     0
```

Controle: 48 × 48 = 2304. Dus $\sqrt{2304}$ = 48 (exact).

```
1 | 56 | 58    125
1              1 × 1
0  56
   44          22 × 2      (2 = 1 + 1)
   12  58
   12  25      245 × 5     (24 = 22 + 2)
       33
```

Controle: 125 × 125 = 15.625. Dus $\sqrt{15.658}$ = 125 (afgerond). Voor een nauwkeuriger resultaat, met twee cijfers achter de komma, gaan we als volgt te werk:

```
1 | 56 | 58 , | 00 | 00    125,13
1                          1 × 1
0  56
   44                      22 × 2       (1 + 1)
   12  58
   12  25                  245 × 5      (22 + 2)
       33  00
       25  01              2501 × 1     (245 + 5)
        7  99  00
        7  50  69          25023 × 3    (2501 + 1)
           48  31
```

Controle: 125,13 × 125,13 = 15.657,52. Dus $\sqrt{15.658}$ = 125,13 (nog steeds afgerond, maar wel nauwkeuriger).

```
17 , | 70     4,2
16            4 × 4
 1   70
 1   64       82 × 2      (4 + 4)
      6
```

Controle: 4,2 × 4,2 = 17,64. Dus $\sqrt{17{,}7}$ = 4,2 (afgerond). Merk op dat we een nul hebben toegevoegd achter de laatste decimaal. Dit om ervoor te zorgen dat de scheidslijn van een groepje op de komma valt. Het is altijd verstandig dit te doen (indien nodig) als je de wortel uit een kommagetal wilt trekken. Verder kun je, zoals ook in het vorige voorbeeld al gebeurde, gewoon doen alsof de komma er niet staat. Waar die moet komen, spreekt meestal voor zich. Maar raak je toch in de war over de correcte plaats van de komma, dan kun je altijd nog schatten. Je weet namelijk dat 17,7 tussen 4 × 4 = 16 en 5 × 5 = 25 ligt. De gevraagde wortel ligt dus ergens tussen 4 en 5.

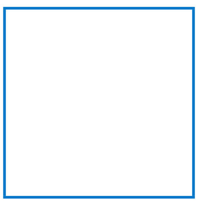
Na het doornemen van bovenstaande formele worteltrekalgoritme is uiteraard oefening nodig voordat je het soepel kunt toepassen.

Verder knaagt er bij sommige lezers misschien iets. Het worteltrekalgoritme lijkt namelijk zomaar uit de lucht te zijn gevallen. Met andere woorden: het heeft op het eerste gezicht een hoog 'hocus-pocusgehalte'. Hoewel we nu weten *hoe* het worteltrekalgoritme werkt, is nog niet echt duidelijk *waarom* het werkt.

We kunnen veel van deze onduidelijkheid wegnemen door het worteltrekalgoritme in een visuele context te plaatsen. Dat doen aan de hand van het voorgaande voorbeeld voor $\sqrt{15.658}$. De context neemt nu de volgende concrete vorm aan: gegeven een vierkant met oppervlakte 15.658 m^2. Hoe lang zijn de zijden? (De omtrek is gewoon 4 × de lengte van een zijde.)

Zoals eerder gezegd, geven we hier geen wiskundig sluitend bewijs voor de correctheid van het worteltrekalgoritme. We hopen alleen maar dat de lezer het algoritme na de volgende visuele beschouwingen plausibel vindt.

Eerst tekenen we het gegeven vierkant.



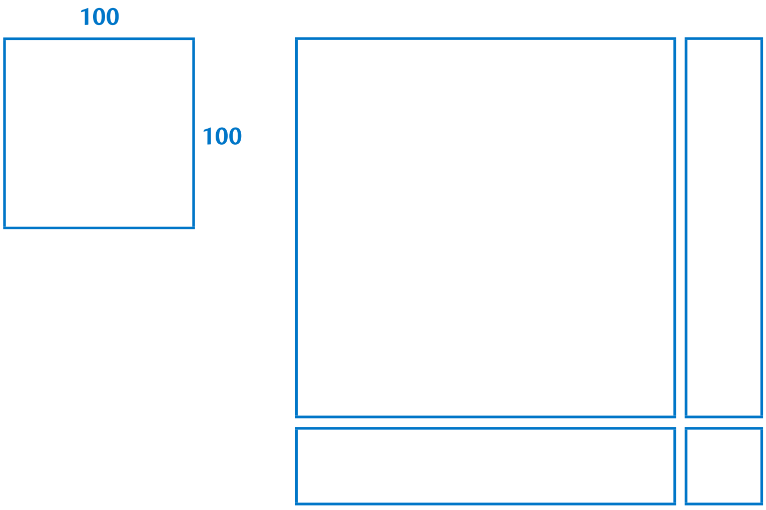
Vervolgens herhalen we de eerste stap van onze berekening.

1 | 56 | 58	**125**
1	**1 × 1**
0	

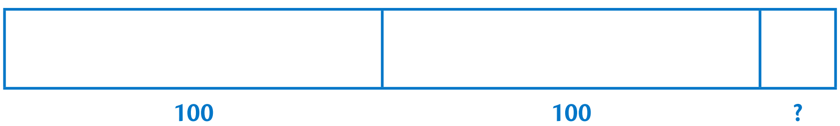
Wat gebeurt hier nu eigenlijk precies in meetkundige zin? Om die vraag te kunnen beantwoorden, moeten we ons eerst afvragen wat er in rekenkundige zin gebeurt.

Het meest linkse cijfer, 1, staat op de positie van de tienduizendtallen. Ook weten we: het kwadraat van een heel veelvoud van 100 is een heel veelvoud van 10.000. Dus eigenlijk zijn we nu de gegeven oppervlakte aan het verminderen met een kwadraat van een (zo groot mogelijk) heel veelvoud van 100.

Meetkundig gezien betekent dit dat we van ons gegeven vierkant een kleiner vierkant afhalen, waarvan de lengte van een zijde een heel veelvoud van 100 is. (De lengte-eenheden vergeten we vanaf nu even.) Bovendien (en dat is belangrijk) kiezen we dat vierkant, binnen de eis dat de zijde een heel veelvoud van 100 lang is, zo groot mogelijk. Ten slotte kunnen we het kleinere vierkant op zo'n manier weghalen dat er van het grote vierkant een L-vormige strook overblijft. Zie het volgende plaatje.



Wisten we de breedte van die strook, dan waren we klaar, want de lengte van een zijde van het gegeven vierkant is eenvoudigweg gelijk aan die van een zijde van het kleinere vierkant + de breedte van de strook. Om de breedte van de strook te bepalen, gaan we iets slims doen. We delen de strook op in twee gelijke rechthoeken en een vierkantje. Daarna doen we nog een keer iets slims: we leggen de twee rechthoeken en het vierkantje achter elkaar, zodat we één lange rechthoekige 'balk' krijgen. De breedte van de strook is nu de lengte van de korte zijde van de balk geworden. We geven die lengte aan met ?, want die zoeken we. Zie plaatje.



Wat weten we wel over de balk? De oppervlakte natuurlijk. Die is namelijk gelijk aan de oppervlakte van het gegeven vierkant verminderd met de oppervlakte van het vierkant met zijde 100. Dus:

oppervlakte balk = 15.658 – 100 × 100 = 5658.

We zoeken dus een getal ? zodanig dat (100 + 100 + ?) × ? = 5658. Nu moet je even goed opletten. Aangezien we het honderdtal van onze uiteindelijke uitkomst al weten (namelijk 1), is het heel vanzelfsprekend om nu te proberen het tiental te zoeken.

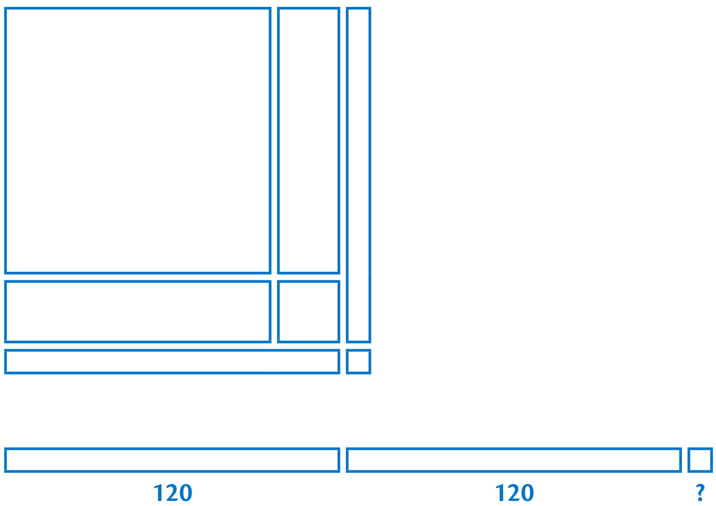
We gaan dus ? benaderen doorons te concentreren op 56 van de overgebleven 5658. We richten ons dus op een veelvoud van 10. We zoeken dus een cijfer c zodanig dat $2c \times c$ zo dicht mogelijk onder 56,58 ligt. Wat neerkomt op: zo dicht mogelijk onder 56, want $2c \times c$ kan natuurlijk alleen maar een heel getal zijn. (Let op: $2c$ is, zoals gezegd, het getal dat ontstaat door c rechts naast 2 te schrijven.) Maar laat dat nu toch allemaal precies zijn wat we in de tweede stap van onze berekening doen!

1 | 56 | 58		125	
1		1 × 1	
0	56		
	44	22 × 2	(2 = 1 + 1)
	12		

Het tiental van de uitkomst is dus 2. We weten daarom dat de uiteindelijke uitkomst tussen 120 en 130 ligt.

In meetkundige zin hebben we nu dit bereikt: we hebben van de balk een iets smallere balk verwijderd, en wel zo dat de korte zijde van de smallere balk een lengte heeft die een heel veelvoud van 10 is (en kleiner dan 100). We hebben nu dus nog een heel dun balkje over, waarvan we in ieder geval zeker weten dat de korte zijde korter is dan 10.

Maar zoals je in de volgende figuur kunt zien, kunnen we dat dunne balkje weer ombuigen tot een L-vormige strook, waarop we de hele procedure nog een keer kunnen loslaten. Alleen wordt de lengte van de beide rechthoeken nu (100 + 20) = 120, in plaats van 100.



Ten slotte merken we nog op dat het belang dat verdubbelen voor het worteltrekalgoritme heeft, voortkomt uit het feit dat de strook die je steeds overhoudt behalve een vierkantje ook *twee* gelijke rechthoeken bevat.

We hopen dat de lezer nu niet meer twijfelt aan de geldigheid en algemene toepasbaarheid van het worteltrekalgoritme. De enige manier waarop je zelf handigheid kunt krijgen in het toepassen van het algoritme is veel oefenen. Zoals eigenlijk altijd het geval is bij rekenkundige technieken. Als eerste oefening volgt hier nu een aantal opgaven.

Oefening: wortels uit willekeurige getallen

Voor de liefhebbers: geef altijd drie cijfers achter de komma, behalve wanneer de uitkomst een geheel getal is. Wie opziet tegen veel rekenwerk mag bij 1, 2 en 4 de uitkomst afgerond op een geheel getal geven en bij 3, 5 en 6 genoegen nemen met één cijfer achter de komma.

1 $\sqrt{128} =$

2 $\sqrt{312346} =$

3 $\sqrt{36{,}4536} =$

4 $\sqrt{14621} =$

5 $\sqrt{456{,}234} =$

6 $\sqrt{2} =$