Basisboek Wiskunde en financiële rekenkunde

Donald van As en Jaap Klouwen

Uitwerkingen van de opgaven in het boek

uitgeverij coutinho

bussum 2014

Deze uitwerkingen horen bij de tweede, herziene druk van Basisboek Wiskunde en financiële rekenkunde van Donald van As en Jaap Klouwen

© 2006 Uitgeverij Coutinho bv
Alle rechten voorbehouden.
Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.
Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16 h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (Postbus 3051, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van (een) gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16h Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

Eerste druk 2006
Tweede, herziene druk 2014

Uitgeverij Coutinho
Postbus 333
1400 AH Bussum
info@coutinho.nl
www.coutinho.nl

Zetwerk: CO2 Premedia, Amersfoort

Noot van de uitgever
Wij hebben alle moeite gedaan om rechthebbenden van copyright te achterhalen. Personen of instanties die aanspraak maken op bepaalde rechten, wordt vriendelijk verzocht contact op te nemen met de uitgever.

ISBN 978 90 469 0415 2
NUR 780, 919

1 Lineaire verbanden

1.1
- **a.** 117 − 38 dus 79
- **b.** b − a
- **c.** 7/18
- **d.** q/p (mits $p \neq 0$
- **e.** −t
- **f.** 1/r

1.2
- **a.** bijv. 7/9 en 9/7 of 0,8 en 1,25
- **b.** bijv. 3/5 en −3/5
- **c.** −23 en 1/23

1.3
- **a.** $a + b + 2a - 2b$, dus $3a - b$
- **b.** $a + b - 2a + 2b$, dus $-a + 3b$
- **c.** kan niet verder vereenvoudigd worden
- **d.** $-3r + 8 - 4r + 4r - 2rt + tr = -3r + 8 - rt$

1.4
- **a.** $8f + 8g + 8 + f + g = 9f + 9g + 8$
  (In de opgave waren de haken om de tweede vorm $f + g$ overbodig.)
- **b.** $15t - 15 - 5t$, dus$10t - 15$
- **c.** $yw - yx - vwy + wx = -yx + wx$
- **d.** $-2cr + 2cd - vrc + rd = -3cr + 2cd + rd$

1.5
- **a.** $kr + tr + k + t + r - 2kr - t = -kr + tr + k + r$
- **b.** $4p - 8q - 3p - 12q - p + pq = -20q + pq$
- **c.** $xy - xz - 2yz + 2yx + 3xz = 3xy + 2xz - 2yz$
- **d.** $RS + 2S + R + SR = 2RS + 2S + R$

1.6
- **a.** $(a + b) \times (c - d) = a \times c - a \times d + b \times c - b \times d = ac - ad + bc - bd$
- **b.** $(a - b) \times (c - d) = a \times c - a \times d - b \times c + b \times d = ac - ad - bc + bd$
- **c.** $2pr - 2ps + 4qr - 4qs$
- **d.** $3ax + 3bx + 3ay + 3by$

1.7
- **a.** $a + ab + ac = a(1 + b + c)$
- **b.** $xy - xz = x(y - z)$
- **c.** $p + pq - pr = p(1 + q - r)$
- **d.** $3p + 6q = 3(p + 2q)$
- **e.** $TO = pq - 3q = q(p - 3)$
- **f.** $p + pq + q$ is niet te ontbinden; er is geen gemeenschappelijke factor

uitgeverij coutinho

1.8 **a.** $K + K \cdot 0{,}05 = K(1 + 0{,}05) = 1{,}05K$

b. $l + ml = l(1 + m)$

c. $m + l + ml$ is niet te ontbinden; er is geen gemeenschappelijke factor

d. $K(1 + g + 1 + g) = K(2 + 2g) = 2K(1 + g)$

e. $x + 2x + 3x = (1 + 2 + 3)x = 6x(!)$

f. $20pq - 10q = 10q(2p - 1)$

1.9 **a.** $\frac{9}{12} + \frac{4}{12}$ dus $\frac{13}{12}$

b. $\frac{3p}{12} + \frac{4}{12}$ dus $\frac{3p + 4}{12}$

c. $\frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}$ dus $\frac{b + a}{ab}$

d. $\frac{2a}{2b} - \frac{7}{2b}$ dus $\frac{2a - 7}{2b}$

e. $\frac{5(1 + R)}{1 + R} + \frac{5}{1 + R} = \frac{5 + 5R}{1 + R} + \frac{5}{1 + R} = \frac{10 + 5R}{1 + R}$

f. $\frac{4g}{g} - \frac{10}{g}$ dus $\frac{4g - 10}{g}$

1.10 **a.** $\frac{1}{4}$

b. $\frac{p}{12}$

c. $\frac{1}{ab}$

d. $\frac{7a}{b \times 2b}$ wat kan worden geschreven als $\frac{7a}{2b^2}$ (zie hoofdstuk 2)

e. $\frac{25}{1} + R$

f. $\frac{40}{g}$

1.11 **a.** $\frac{3}{4} \times \frac{3}{1}$ dus $\frac{9}{4}$ (delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde)

b. $\frac{p}{4} \times 3$ dus $\frac{3p}{4}$

c. $\frac{1}{a} \times \frac{b}{1}$ dus $\frac{b}{a}$

d. $\frac{a}{b} \times \frac{2b}{7}$ dus $\frac{a}{7} \times \frac{2b}{b}$ dus $\frac{a}{7} \times 2$ dus $\frac{2a}{7}$

e. $5 \times \frac{1 + R}{5} = 1 + R$

f. $4 \times \frac{g}{10}$ dus $\frac{2g}{5}$

1.12 **a.** $\frac{9}{6C} + \frac{2}{6C}$ dus $\frac{11}{6C}$

b. $\frac{48}{2y} - \frac{3}{2y}$ dus $\frac{45}{2y}$

c. $\frac{8}{16} \times \frac{p}{p} \times \frac{1}{q}$ dus $\frac{1}{2q}$

d. $\frac{10a + 30}{5} + \frac{a}{5}$ dus $\frac{11a + 30}{5}$

e. $\frac{5c}{c + 2} \times 2$ dus $\frac{10c}{c + 2}$

f. $\frac{a}{g \times \left(\frac{1}{g} - 1\right)}$ dus $\frac{a}{1 - g}$

1.13 **a.** $(2 + R) \times 10 - 4 \times \frac{R}{12} = 20 + 10R - \frac{R}{3} = \frac{60 + 30R}{3} - \frac{R}{3} = \frac{60 + 29R}{3}$

b. haakjes uitwerken geeft: $\frac{l_{60}}{1_{40}} - \frac{l_{60}}{l_{40}} \times \frac{l_{65}}{l_{60}} = \frac{l_{60}}{l_{40}} - \frac{l_{65}}{l_{40}} = \frac{l_{60} - l_{65}}{l_{40}}$

1.14 **a.** $b \times \left(a \times \frac{1}{c}\right) = \frac{a \times b}{c} = \frac{ab}{c}$

b. $(b - c)/a = \frac{b - c}{a} = \frac{b}{a} - \frac{c}{a}$ of: $b/a - c/a$

c. $\frac{1}{a} \times (b - c) = \frac{b}{a} - \frac{c}{a}$ of: $b/a - c/a$ (dus identiek aan 1.14b)

d. $\frac{3}{x} \cdot (x + y) = 3 + \frac{3y}{x}$

1.15 **a.** $\frac{ab - ac}{d} = \frac{a(b - c)}{d}$

b. $\frac{ab - c}{c}$ is niet te ontbinden

c. $K/g + K + Kg = K(1/g + 1 + g)$

1.16 debt ratio $= \frac{VV}{TV}$

1.17 $0{,}4p + q = 6$ geeft $0{,}4q = -p + 6$, dus $q = \frac{-p + 6}{0{,}4} = -2{,}5p + 15$

(delen door 0,4 is equivalent met vermenigvuldigen met 2,5; het omgekeerde van 0,4)

1.18 $5v = -2u + 50$ dus $v = -0{,}4u + 10$

1.19 $F = \frac{9}{5}C + 32$, dus $F - 32 = \frac{9}{5}C$, dus $\frac{5}{9}(F - 32) = C$

C als functie van F is dus $\frac{5}{9}(F - 32)$, of, zonder haakjes: $C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$

uitgeverij | coutinho C

1.20 **a.** $ab = 1 - c$ dus $a = (1 - c)/b$
b. $3a = -b - c$ dus $a = -1b - 1c$
c. $a(b - c) = 5 - -b$ dus $a = (5 - -b)/(b - c)$

1.21 **a.** $c = 1 - ab$
b. $c = -3a - b$
c. $ac = ab + b - 5$ dus $c = b + b/a - 5/a$

1.22 De richtingscoëfficiënt (helling) is $\dfrac{K(13) - K(9)}{13 - 9} = \dfrac{21 - 15}{4} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5$
dus $K(t) = 1{,}5t +$ constante.
Nu coördinaten van één van de punten invullen: $15 = 1{,}5 \cdot 9 + c$ ofwel $c = 1{,}5$ wat leidt tot het antwoord: $K = 1{,}5t + 1{,}5$.
(Controle: vul de coördinaten van het andere punt in: $21 = 1{,}5 \cdot 13 + 1{,}5$ geeft $21 = 19{,}5 + 1{,}5$; klopt!)

1.23 r.c. $= \dfrac{C(8) - C(4)}{8 - 4} = \dfrac{8 - 15}{4} = \dfrac{-7}{4} = -1{,}75$ dus $C(Y) = -1{,}75Y +$ constante; coördinaten van één van de punten invullen: $15 = -1{,}75 \cdot 4 + c$ ofwel $c = 22$ wat leidt tot het antwoord:

$C = -1{,}75Y + 22$. (Controle: vul de coördinaten van het andere punt in: $8 = -1{,}75 \cdot 8 + 22$ geeft $8 = -14 + 22$; klopt!)

1.24 Er geldt: $\dfrac{\Delta I}{\Delta Y} = 0{,}6$ ofwel r.c. $= 0{,}6$ dus $I = 0{,}6 \cdot Y +$ constante; invullen coördinaten $(10;12)$ geeft: $12 = 0{,}6 \cdot 10 + c$ dus $c = 6$. Het antwoord: $I = 0{,}6Y + 6$

1.25 **a.** $4y = -6x + 15$ dus $y = \dfrac{-6}{4}x + 15$ dus r.c. $= -\dfrac{6}{4} = -1{,}5$
b. $6x = -4y + 15$ dus $y = \dfrac{-4}{6}x + 2{,}5$ dus r.c. $= -\dfrac{4}{6} = -\dfrac{2}{3}$
c. De richtingscoëfficiënten zijn $-1{,}5$ en $-\frac{2}{3}$, het product is 1, dus zijn elkaars omgekeerde.

1.26 **a.** $3r = 9$ dus $r = 3$
b. $2x - 10 = 25$ dus $2x = 35$ dus $x = 17{,}5$
c. $3 - 6 + 2y = 60$ dus $-3 + 2y = 60$ dus $2y = 63$ dus $y = 31{,}5$
d. $13x + 20 - 12x - 20 = 0$ dus $x = 0$

1.27 **a.** $8 - 30 + 45n = 35n - 38$ dus $-22 + 10n = -38$ dus
$10n = -16$ dus $n = -1{,}6$
b. $0{,}4t - 0{,}6 + 0{,}9t = t$ dus $1{,}3t - 0{,}6 = t$ dus $0{,}3t - 0{,}6 = 0$ dus $0{,}3t = 0{,}6$ dus $t = 2$
c. $4p - 33 + 12p = p = 29p + 58$ dus $17p - 33 = 29p - 58$ dus $-12p = -25$ dus
$p = \dfrac{-25}{-12} = \dfrac{25}{12}$

uitgeverij coutinho C

d. $\frac{2}{3}R + \frac{5}{3} - \frac{2}{9}R = \frac{R-8}{12}$ dus $\frac{6}{9}R + \frac{5}{3} - \frac{2}{9}R = \frac{1}{12}R - \frac{8}{12}$ dus $\frac{4}{9}R + \frac{5}{3} = \frac{1}{12}R - \frac{2}{3}$ dus $\frac{16}{36}R - \frac{3}{36}R = -\frac{7}{3}$ dus $\frac{13}{36}R = -\frac{7}{3}$ dus $R = -\frac{7}{3} \times \frac{36}{13} = -7 \times \frac{12}{13} = -\frac{84}{13}$

1.28 Haakjes uitwerken geeft: in $0{,}5u + R - vR = wR$
Hierin de termen met R naar één kant: $0{,}5u = wR + vR - R$
Dan R buiten haken halen: $0{,}5u = (w + v - 1)R$
delen door $w + v - 1$: $R = \frac{0{,}5u}{w + v - 1}$

1.29 $GTK = \frac{3{,}4q + 17}{q} = 5$ dus $3{,}4q + 17 = 5q$ dus $1{,}6q = 17$ dus $q = 10{,}625$ (10.625 stuks)

1.30 $\frac{2}{4x} + \frac{1}{4x} = 10$, dus $\frac{3}{4x} = 10$. Hieruit volgt: $40x = 3$ en dus $x = 3/40$.

1.31 De formule voor de quick ratio is (zie paragraaf 1.5.3):
$$\text{quick ratio} = \frac{\text{vlottende activa} - \text{voorraden}}{\text{kort vreemd vermogen}}$$
Invullen van de gegevens levert: $0{,}8 = \frac{7{,}7 - 5{,}1}{KVV}$
Kruislings vermenigvuldigen geeft $0{,}8 \cdot KVV = 2{,}6$, dus $KVV = 2{,}6/0{,}8 = 3{,}25$ miljoen euro.

1.32 De formule voor bezettingsresultaat is (zie paragraaf 1.5.3):
$$\text{bezettingsresultaat} = (W - N) \cdot \frac{C}{N}$$
Invullen van de gegevens levert: $250.000 = (52.000 - N) \cdot \frac{1.000.000}{N}$
Kruislings vermenigvuldigen geeft: $250.000 \cdot N = (52.000 - N) \cdot 1.000.000$
Links en rechts delen door 1.000.000 geeft:
$0{,}25N = 52.000 - N$, dus $1{,}25N = 52.000$ dus $N = 52.000/1{,}25 = 41.600$

1.33 **a.** vermenigvuldiging met respectievelijk 2 en 1 geeft:
$$\begin{array}{rl} 4x - 6y = 6 & \\ -4x + 11y = 4 & + \\ \hline 5y = 10 & \end{array} \quad \text{dus} \quad y = 2$$

vermenigvuldiging met respectievelijk 11 en 3 geeft:
$$\begin{array}{rl} 22x - 33y = 33 & \\ -12x + 33y = 12 & + \\ \hline 10x \qquad = 45 & \end{array} \quad \text{dus} \quad x = 4{,}5$$

oplossing: $\begin{cases} x = 4{,}5 \\ y = 2 \end{cases}$

uitgeverij | coutinho c

b. We herschrijven de tweede vergelijking als volgt: $8x - 2y = x + 5$; dit leidt tot:

$$\begin{cases} 8x - 7y = 1 \\ 7x - 2y = 5 \end{cases}$$

vermenigvuldiging met respectievelijk 7 en -8 geeft:

$$\begin{array}{rl} 56x - 49y = 7 & \\ -56x + 16y = -40 & + \\ \hline -33y = -33 & \text{dus} \quad y = 1 \end{array}$$

vermenigvuldiging met respectievelijk -2 en 7 geeft:

$$\begin{array}{rl} -16x + 14y = -2 & \\ 49x - 14y = 35 & + \\ \hline 33x \qquad = 33 & \text{dus} \quad x = 1 \end{array}$$

oplossing: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

c. Er moet gelden: $0{,}6x + 30 = 0{,}4x + 45$; dit leidt tot $0{,}2x = 15$ dus tot $x = 75$. Substitutie in de eerste vergelijking geeft $y = 0{,}4 \cdot 75 + 45 = 75$.

oplossing: $\begin{cases} x = 75 \\ y = 75 \end{cases}$

1.34 a. vermenigvuldiging met respectievelijk 3 en -6 geeft:

$$\begin{array}{rl} 5u + 2v = 60 & \\ -u - 2v = 12 & + \\ \hline 4u \qquad = 72 & \text{dus} \quad u = 18 \end{array}$$

vermenigvuldiging met respectievelijk 3 en -30 geeft:

$$\begin{array}{rl} 5u + \ \ 2v = 60 & \\ -5u - 10v = 60 & + \\ \hline -8v \qquad = 120 & \text{dus} \quad v = -15 \end{array}$$

oplossing: $\begin{cases} u = 18 \\ v = -15 \end{cases}$

b. substitutie van tweede vergelijking in de eerste vergelijking geeft:

$5v = 4(v - 2) + 12{,}5$

$5v = 4v - 8 + 12{,}5$

$v = 4{,}5$

substitutie van $v = 4{,}5$ in de tweede vergelijking geeft: $u = 4{,}5 - 2 = 2{,}5$

oplossing: $\begin{cases} u = 2{,}5 \\ v = 4{,}5 \end{cases}$

uitgeverij coutinho

c. substitutie van de tweede vergelijking in de eerste vergelijking geeft:
$u = 3(-0{,}5u - 10) - 18$
$u = -1{,}5u - 30 - 18$
$2{,}5u = -48 \quad \text{dus} \quad u = \dfrac{-48}{2{,}5} = -19{,}2$

Substitutie van $u = -19{,}2$ in de tweede vergelijking geeft:
$v = -0{,}5 \cdot -19{,}2 - 10 = -0{,}4$

oplossing: $\begin{cases} u = -19{,}2 \\ v = -0{,}4 \end{cases}$

1.35 $p = 80$; $b = 90$

1.36 De prijzen inclusief btw worden berekend door te vermenigvuldigen met 1,21; ze bedragen respectievelijk € 484, € 28,80 en € 9,08 (twee decimalen, het gaat immers om geldbedragen).

1.37 De prijzen exclusief btw worden berekend door te delen door 1,21 ofwel te vermenigvuldigen met het omgekeerde van 1,21; ze bedragen respectievelijk € 81,82, € 701,65 en € 0,65.

1.38 $449 \times \dfrac{0{,}21}{1{,}21}$, dus € 77,93

1.39 Vermeerderen met 50% betekent vermenigvuldigen met 1,5; verminderen met 50% betekent vermenigvuldigen met 0,5; in totaal dus $1{,}5 \cdot 0{,}5$ ofwel 0,75 wat een vermindering met 25% oplevert. Het antwoord is dus −25%.

1.40 $0{,}65 \times 0{,}7 = 0{,}455$ dus in totaal 54,5% korting

1.41 De groeifactor bedraagt $\dfrac{1}{1{,}26}$

ofwel 0,794 dus 20,6% lager.

1.42 **a.** Aangenomen wordt dat die btw-verhoging ook inderdaad is doorgevoerd op 1 oktober 2012. (Dat was niet overal zo.) 21/19 = 1,1053 dus met 10,5% gestegen
b. 2%-punt
c. $1{,}21/1{,}19 = 1{,}0168$ dus de prijzen zijn met 1,7% gestegen

1.43 De groeifactor is (ruim) 11, dus de groeivoet is 10. Het groeipercentage is dan 1000; dus 1000% inflatie.

1.44 **a.** $V = I \cdot (1 + m) = 50 \cdot 1{,}3 = €\ 65$
b. $V = \dfrac{I}{1 - m} = \dfrac{50}{1 - 0{,}3} = \dfrac{50}{0{,}7} = €\ 71{,}43$

uitgeverij | c
coutinho

1.45 $V = 130 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}21 = €\ 226{,}51$

1.46 De absolute groei bedraagt $K(1200) - K(1000) = 90$.

De relatieve groei bedraagt $\dfrac{K(1200) - K(1000)}{K(1000)} = \dfrac{90}{600} = 0{,}15$ dus 15%

1.47 **a.** De absolute groei van de prijs is $-0{,}20$; relatief: $-0{,}20/2{,}50 = -0{,}08$.

b. De absolute groei van de afzet is 9000; relatief is dat $9000/100.000 = 0{,}09$.

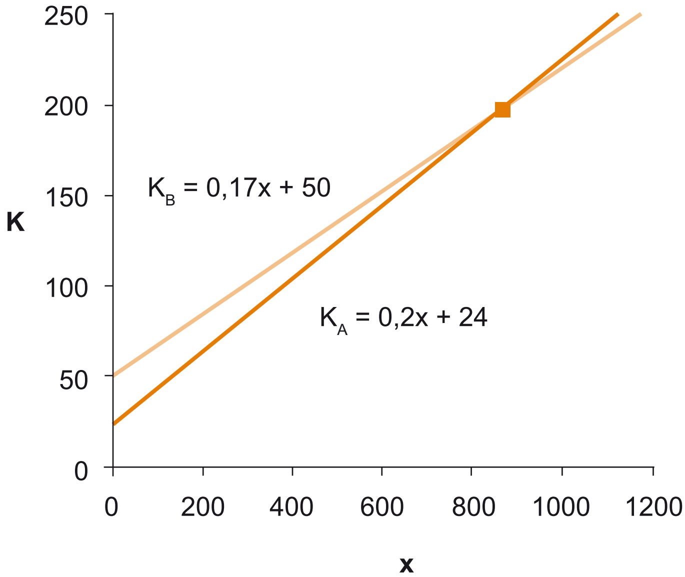
c. De absolute groei van de omzet is $2{,}30 \cdot 109.000 - 2{,}50 \cdot 100.000 = 700$, dat is relatief $700/250.000 = 0{,}0028$.

d. De prijselasticiteit van de afzet is $0{,}09/-0{,}08 = -1{,}125$.

1.48 **a.** $KA(x) = 24 + 0{,}2x$ en $KB(x) = 50 + 0{,}17x$ (met x = aardgasverbruik per jaar in m^3; K in euro's).

b. Bereken het break-evenpunt: $KA(x) = KB(x)$. Dus $24 + 0{,}2x = 50 + 0{,}17x$. Hieruit volgt: $0{,}03x = 26$, dus $x = 26/0{,}03 = 866{,}7$. Vanaf 867 m^3 is energiebedrijf B voordeliger.

c.



1.49 **a.** De provisiekosten bij de NBA-bank zijn $9{,}5 + 0{,}0015 \times 3000 = 14$ euro; bij de Barobank $0{,}002 \times 3000 = 6$ euro.

b. $KNBA(W) = 9{,}5 + 0{,}0015W$ en $KBARO(W) = 0{,}002W$(euro), met W de waarde van het aandelenpakket.

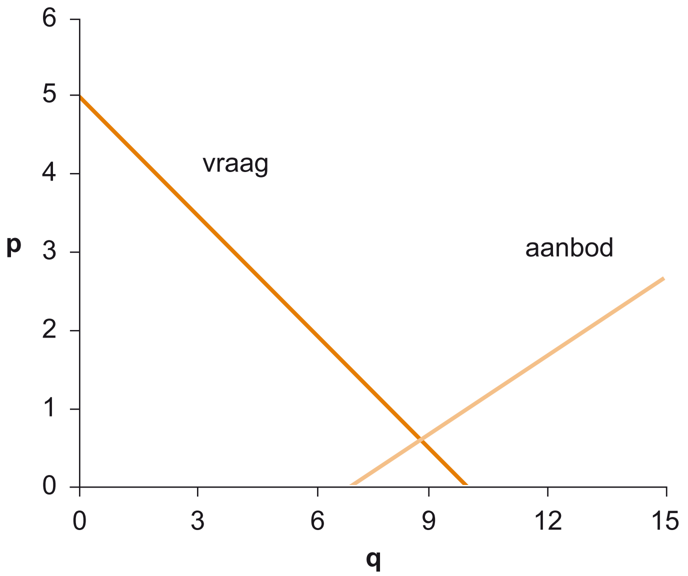
c. Het gelijkstellen van deze beide kostenfuncties geeft de vergelijking $9{,}5 + 0{,}0015W = 0{,}002W$; de oplossing is $W = 19.000$ euro. Voor $W > 19.000$ is de NBA-bank goedkoper.

1.50 Uit $q_v = q_a$ volgt $-3p + 34 = 5p + 2$, dus $-8p = -32$. Conclusie: $p = 4$; invullen in bijvoorbeeld q_v levert: $q = 22$. Evenwichtsprijs en -hoeveelheid zijn dus respectievelijk 4 euro en 22.000 stuks.

uitgeverij | coutinho C

1.51 **a.** Stel de beide functies aan elkaar gelijk: $3p + 7 = -2p + 10$. Hieruit volgt: $5p = 3$, dus $p = 0{,}6$; invullen van deze waarde in qa of qv levert: $q = 8{,}8$.

b.



1.52 **a.** Als p toeneemt van 4 tot 5, is $\Delta p = 1$; als $p = 4$ dan is q gelijk aan 60 en als p gelijk is aan 5 dan is q gelijk aan 59,25, dus $q = -0{,}75$.

De prijselasticiteit is gelijk aan $\dfrac{\Delta q/q}{\Delta p/p} = \dfrac{-0{,}75/60}{1/4} = -0{,}05$

Sneller is: $E_{p,q} = \dfrac{\Delta q}{\Delta p} \times \dfrac{p}{q} = -0{,}75 \times \dfrac{4}{60} = -0{,}05$

b. $= -0{,}75 \times \dfrac{p}{63 - 0{,}75p} = -\dfrac{1}{2}$, dus $\dfrac{-0{,}75p}{63 - 0{,}75p} = -\dfrac{1}{2}$. Kruislings vermenigvuldigen geeft:

$1{,}5p = 63 - 0{,}75p$. Hieruit volgt $2{,}25p = 63$, dus $p = 63/2{,}25 = 28$

1.53 **a.** $q = -\dfrac{4}{7}p + 20$

b. Als p toeneemt van 14 naar 21, neemt q af van 12 naar 8, dus

$E_{p,q} = \dfrac{\Delta q/q}{\Delta p/p} = \dfrac{-4/12}{7/14} = -0{,}67$

c. $E_{p,q} = \dfrac{\Delta q}{\Delta p} \times \dfrac{p}{q} = -\dfrac{4}{7} \times \dfrac{14}{12} = -0{,}67$

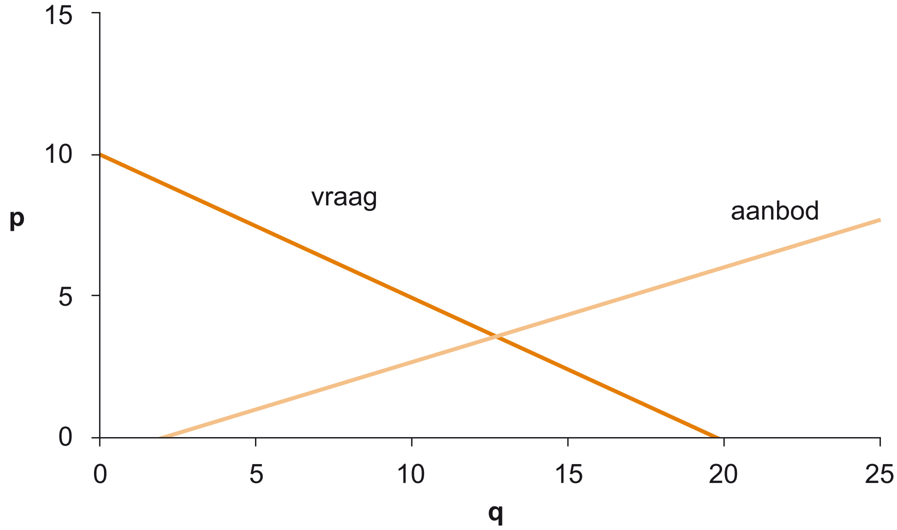
d. Segmentelasticiteit bij b; puntelasticiteit bij c.

1.54 **a.** $p(q) = -0{,}6q + 5{,}6$ (m.b.v. Excel trendlijn)

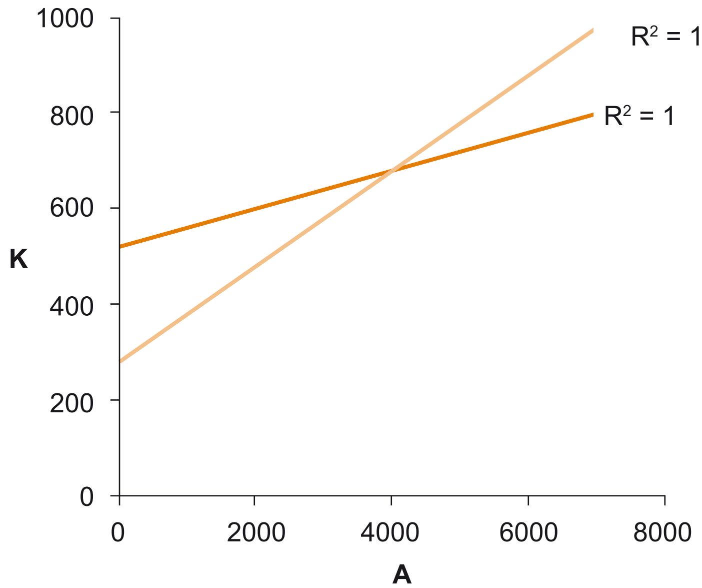
b. Trendlijn met verwisseling van coördinaten levert: $q(p) = -1{,}67p + 9{,}33$ (op twee decimalen afgerond).

c. Omwerken van p(q) naar q(p) klopt: ga uit van $p = -0{,}6q + 5{,}6$, dus $0{,}6q = -p + 5{,}6$. Deel links en rechts door 0,6: $q = -1{,}67p + 9{,}33$.

1.55 Neem voor de aanbodfunctie bijvoorbeeld de (q;p)-punten (2;0) en (5;1), en voor de vraagfunctie (20;0) en (0;10).



1.56



(Dit is figuur 1.4 in paragraaf 1.12.)

uitgeverij coutinho C

1.57 Zie het aflossingsschema:

	A	B	C	D	E
1	**Lening**				
2					
3	**Type lening**		Lineair		
4	**Kapitaal**		100000		
5	**Looptijd**		10		
6	**Interest**		4%		
7					
8	**Aflossingsschema**				
9	Jaar	Aflossing	Interest	Totaal	Restschuld
10	1	10000	4000	14000	90000
11	2	10000	3600	13600	80000
12	3	10000	3200	13200	70000
13	4	10000	2800	12800	60000
14	5	10000	2400	12400	50000
15	6	10000	2000	12000	40000
16	7	10000	1600	11600	30000
17	8	10000	1200	11200	20000
18	9	10000	800	10800	10000
19	10	10000	400	10400	0

Er geldt: $A(t) = 10.000$, $I(t) = 4400 - 400t$, $T(t) = 14.400 - 400t$, $R(t) = 100.000 - 10.000t$ ($t = 1, \ldots, 10$)

Gemengde opgaven

1.58 **a.** -179

b. $-d + m + 4$

c. $\frac{68}{77}$

d. $\frac{7}{4}$

e. $-\frac{1}{13x}$ (mits $x \neq 0$)

f. $-15R$

1.59 tegengestelde: $-\frac{5}{8}$; omgekeerde: $\frac{8}{5}$

uitgeverij | coutinho c

1.60 **a.** $4xz + 18yz + 7x + 6y - 122$

b. $48t - 150$

c. $14pq - 8pr$

d. $\frac{1}{T} + \frac{2T \times T}{T} = \frac{1 + 2T^2}{T}$ (zie hoofdstuk 2)

1.61 **a.** $\frac{9}{3D} + \frac{D \times D}{3D} = \frac{9 + D^2}{3D}$ (zie hoofdstuk 2)

b. $\frac{2Y + 10}{16 + Y}$

c. $\frac{107x + 15}{40}$

d. $\frac{5}{6}$

1.62 **a.** $\text{omlooptijd van de voorraden} = \frac{\text{voorraden}}{\text{kostprijs van de voorraden}}$

b. $\text{omlooptijd van de voorraden} = \frac{\text{voorraden}}{\text{kostprijs van de voorraden}} \cdot 365$

1.63 $M(x) = -0{,}75x + 14{,}25$

1.64 **a.** $\frac{31}{21}$

b. 22

c. -12

1.65 **a.** $0{,}5 \cdot 7{,}1 + 0{,}5 \cdot 4{,}8 = 5{,}95$ liter per 100 km

b. Stel het gevraagde perunage x, dan volgt de vergelijking: $7{,}1x + 4{,}8(1 - x) = 5{,}6$. Hieruit volgt $2{,}3x = 0{,}8$ en dus $x = 0{,}348$ ofwel 34,8% binnen de stad rijden.

c. $100/7{,}1 = 14{,}08$ dus 1:14,1 ('1 op 14,1').

d. Het product van beide eenheden is steeds 100.

1.66 Stel x = aantal huishoudens dat het product gebruikt. Dan volgt: $0{,}6x + 0{,}4 \cdot 2x = 6500$ dus $1{,}4x = 6500$. Dan is x ongeveer 4643. Daarmee is de penetratiegraad $4643/30.000 = 0{,}1547$ dus 15,5%.

1.67 **a.** $p = \frac{200}{37}$; $q = \frac{108}{37}$

b. $p = \frac{47}{16}$; $q = \frac{33}{16}$

1.68
$$\begin{cases} -12w + 15y = 30 \\ -5w + 7y = 17 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \times -5 \\ \times 12 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 60w - 75y = 150 \\ -60w + 84y = 204 \end{cases} \Leftrightarrow \text{optellen} \begin{cases} 60w - 75y = 150 \\ 9y = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60w - 75y = 150 \\ y = 6 \end{cases}$$

Invullen in de tweede vergelijking van het oorspronkelijke stelsel levert:
$-5w + 7 \cdot 6 = 17$ dus $-5w = -25$, dus $w = 5$.

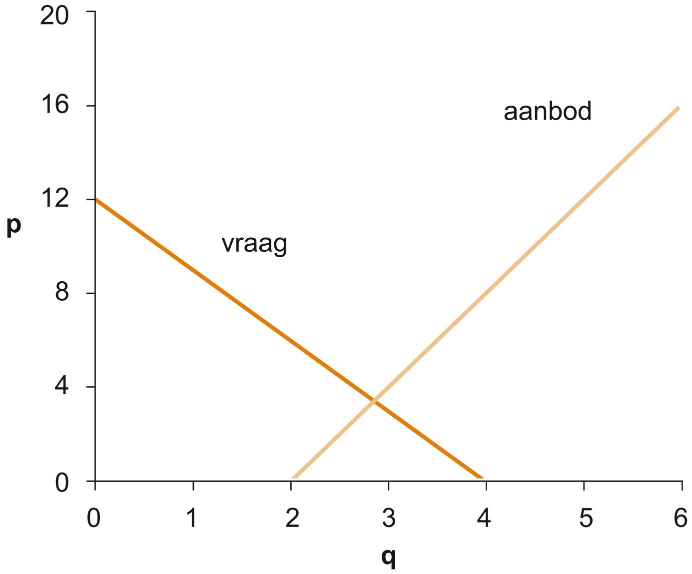
1.69 € 178,33 respectievelijk € 215,78

1.70 $V = \frac{28{,}95}{0{,}75} \cdot 1{,}21 = € \ 46{,}71$

1.71 Bedrag $= 69{,}90 \times 0{,}75 \times \frac{1}{1{,}06} \times 0{,}15 \approx 7{,}42$ euro

1.72 Groeifactor is $\frac{1{,}21}{1{,}097} = 1{,}103$, dus een toename met 10,3%.

1.73 **a.**



b. $p = \frac{24}{7}$; $q = \frac{20}{7}$

1.74 **a.** $q = -0{,}8p + 12$

b. $E_{p,q} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \times \frac{p}{q} = -0{,}8 \times \frac{10}{4} = -2$

c. $-0{,}8 \times \frac{p}{-0{,}8p + 12} = -1$. Kruislings vermenigvuldigen levert $-0{,}8p = 0{,}8p - 12$, dus $-1{,}6p = -12$. Hieruit volgt $p = 7{,}5$. Invullen in de afzetfunctie geeft $q = 6$.

1.75 **a.** \$ 1 = € 1/1,36 = € 0,735.

b. De beide koersen zijn elkaars omgekeerde.

c. Respectievelijk: 0,342; 1,099; 0,006; 0,299 en 0,110 (€).

d. \$ 1 = € 1/1,36 = £ 0,91 · 1/1,36 = £ 0,669

e. 1 yen = € 1/154,8 = 9,11 · 1/154,8 yuan = 0,059 yuan

f. Zie de tabel.

		Van				
		€	\$	£	yen	yuan
Naar	€	1	0,735	1,099	0,006	0,110
	\$	1,36	1	1,495	0,009	0,149
	£	0,91	0,669	1	0,006	0,100
	yen	154,8	113,8	170,1	1	16,99
	yuan	9,11	6,699	10,01	0,059	1

1.76 Ja, met kapitaal 2 miljoen, looptijd tien jaar en interest 5,6% per jaar.

1.77
a. $y = 10 - 2x$
b. $y = 4x - 12$
c. $y = \frac{3}{5}x + 5$
d. $y = \frac{2}{3}x + 2$
e. $y = \frac{1}{3}x - 7$
f. $y = \frac{1}{27}x - \frac{7}{9}$

1.78
a. $x = \frac{19}{15}$
b. $x = 30$
c. $x = \frac{66}{13}$
d. $x = \frac{5}{34}$

1.79 $R = \frac{P_0 g + D_1}{P_0}$

1.80
a. $\frac{a+b}{ab}$
b. $\frac{4y+5}{y}$
c. $\frac{9}{6x} - \frac{12}{6x} + \frac{6}{6x} = \frac{3}{6x} = \frac{1}{2x}$
d. $\frac{3}{a} - 1 + \frac{6}{a} = \frac{9-a}{a}$
e. $x - \frac{2x}{y} + \frac{1}{y} = \frac{xy}{y} - \frac{2x}{y} + \frac{1}{y} = \frac{xy - 2x + 1}{y}$
f. $1 - \frac{2}{R} + \frac{2}{R} - \frac{4}{R^2} = \frac{R^2 - 4}{R^2}$

1.81
a. $\frac{6}{6y} + \frac{6}{6y} + \frac{6}{6y} = \frac{18}{6y} = \frac{3}{y}$
b. $\frac{1}{y} + \frac{2}{y^2} + \frac{3}{y^3}$ (kan niet verder vereenvoudigd)

1.82 $13x + 18 - 24x = -11$ dus $-11x = -29$ dus $x = 29/11$

uitgeverij | coutinho

1.83 **a.** $q - \frac{7}{5p} = 15 \quad \rightarrow \quad \frac{7}{5}p = -q + 15 \quad \rightarrow \quad p = -\frac{5}{7}q + \frac{75}{7}$

b. Bijvoorbeeld: $7p + 5q = 75$

1.84 **a.** $\begin{cases} 4x + 5y = 6 & \times 3 \\ -3x + 7y = 12 & \times 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12x + 15y = 18 \\ -12x + 28y = 48 \end{cases}$ optellen geeft $43y = 66$, dus $y = \frac{66}{43}$

b. Tel bijvoorbeeld $6\times$ de eerste vergelijking bij de tweede vergelijking op: $23x = 34{,}5$ dus $x = 1{,}5$. Hieruit volgt $y = 4$.

1.85 $\frac{3}{5}q + p = 27 \rightarrow \frac{3}{5}q = -p + 27 \rightarrow q = -\frac{5}{3}p + 45$

1.86 **a.** $-0{,}5p - 3 + 5p + 11/2 = -2p + 9$, dus $8p = 12$, dus $p = 1{,}5$

b. $2p - 1 + 3p + 1/2p = 5p + 4$, dus $1p = 5$, dus $p = 10$

1.87 $\begin{matrix} 5u + 2 - 2v = -3v + 11 \\ 6u + 4v = 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 5u + v = 9 \\ 6u + 4v = 1 \end{matrix}$

4×1^e en -1×2^e vergelijking: $\begin{matrix} 20u + 4v = 36 \\ -6u - 4v = -1 \end{matrix}$ optellen geeft $14u = 35$ dus

$u = 2{,}5u = 2{,}5$ invullen in tweede vergelijking: $4v = 1 - 15 = -14$, dus $v = -3{,}5$

1.88 **a.** $p = 5$ geeft $q = 8$

Stel dat p toeneemt tot 6, dan neemt q af met $\frac{4}{5}$ en wordt dan $7\frac{1}{5}$; dus:

$$E_q^p(p = 5) = \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\frac{-0{,}8}{8}}{\frac{1}{5}} = -0{,}5$$

b. $$E_q^p = \frac{\frac{\Delta}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \times \frac{p}{q} = -\frac{4}{5} \times \frac{p}{-\frac{4}{5}p + 12} = -1 \rightarrow$$

$-\frac{4}{5}p = \frac{4}{5}p - 12 \rightarrow -\frac{8}{5}p = -12 \rightarrow p = -\frac{5}{8} \times -12 \rightarrow p = 7{,}5$

1.89 $p + \frac{2}{3}q = 10 \rightarrow \frac{2}{3}q = -p + 10 \rightarrow q = -\frac{3}{2}p + 15$

1.90 **a.** Vul $y = 0$ in: $2x = 5$ dus $x = 2{,}5$.

b. Schrijf y als functie van x. Dit is $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. De richtingscoëfficiënt is dus $-\frac{2}{3}$.

c. Lijn m heeft als vergelijking: $y = -\frac{2}{3}x + b$. Vul het punt (3,4) in:
$4 = -\frac{2}{3} \cdot 3 + b$. Hieruit volgt: $b = 6$, Dus m heeft vergelijking: $y = -\frac{2}{3}x + 6$.

uitgeverij coutinho c

2 Exponentiële verbanden

* Er wordt niet met negatieve uitkomsten gewerkt.

2.1 **a.** 5^7
b. – (niet te schrijven als macht van één grondtal)
c. 20^3
d. $1{,}1^7$
e. $2^{10} \cdot 2^3 = 2^{13}$
f 3^{15}
g. – (niet te schrijven als macht van één grondtal)
h $1{,}015^{15}$
i. $1{,}04^{35}$
j . – (niet te schrijven als macht van één grondtal)
k. 0
l. $\left(\frac{66}{91}\right)^6$, of met het grondtal afgerond op drie decimalen: $0{,}725^6$

2.2 **a.** k^{11}
b. $p^{10}q^5$
c. $(1+r)^8$
d. $(1+m) \cdot [(1+m) - 1] = (1+m) \cdot m = (1+m)m$
Of: $1 + 2m + m^2 - 1 - m = m + m^2 = m(1+m)$

2.3 **a.** t^9
b. $p^{12}q^9r^3$
c. $(p+q)^2 - (p-q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 - (p^2 - 2pq + q^2) = 4pq$
d $a^2 - 2b^2$

2.4 **a.** $\dfrac{10 + 5R}{(1+R)^2}$

b. $\dfrac{i^2 + i + 1}{i^3}$

2.5 **a.** $6a + a^2 = a(6 + a)$ of $a(a + 6)$
b. $p^2 - 2pq = p(p - 2q)$
c. $2y^3 - 8y^2 = 2y^2(y - 4)$
d. $-q^2 + 23q = q(-q + 23)$
e. $-q^2 + 23q - 200$ is niet te ontbinden
f. $xy^2 - x^2y = xy(y - x)$
g. $3q^4 - 9q^2 = 3q^2(q^2 - 3)$

uitgeverij coutinho c

h. $x^{1,5} + x^{0,5} = x^{0,5}(x+1)$ of $\sqrt{x} \cdot (x+1)$
i. $q\sqrt{p} + 3p^{11/2} = \sqrt{p(q+3p)}$ of $\sqrt{p(3p+q)}$

2.6

exponent:	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
macht van 5:	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25	125	625

$5^{10} : 5^{-10} = 5^{20} \approx 9{,}5 \cdot 10^{13}$, dus 5^{10} is $9{,}5 \cdot 10^{13}$ keer zo groot als 5^{-10}

2.7 **a.** 5^3
b. $5^{-10} = \dfrac{1}{5^{10}}$
c. $a^{-6}b^3 = \dfrac{b^3}{a^6}$
d. $\dfrac{1}{p^7}$
e. $5^0 (= 1)$
f. p^9
g. $\dfrac{1}{y^5}$
h. $\dfrac{b^5}{a}$

2.8 **a.** $p^{-1} \times q \times p^6 \times q^{-3} \times q^2 + p^6 = p^5 + p^6$
b. $d^5 \cdot \sqrt[4]{d}$
c. 7^{-b-2}
d. p^2

2.9 **a.** $(1+R)^0 = 1$
b. $\dfrac{(1+R)^{10} - 1}{R}$

2.10 **a.** $7^{\frac{6}{3}} = 7^2$
b. $5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{5} = 5^{\frac{9}{20}}$
c $\sqrt{30} = 30^{\frac{1}{2}}$
d. $1{,}06^{\frac{240}{12}} \times 1{,}06^{-25} = 1{,}06^{20} \times 1{,}06^{-25} = 1{,}06^{-5} = \frac{1}{1{,}06^5}$
e. $g^{\frac{5}{12}} \times g^{\frac{1}{2}} = g^{\frac{11}{12}}$
f. $\dfrac{f^{\frac{1}{4}}}{f^{\frac{2}{3}}} = f^{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}} = f^{-\frac{5}{12}} = \dfrac{1}{f^{\frac{5}{12}}}$

2.11 **a.** $\sqrt[3]{10}$
b. $1{,}1^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{1{,}1^5}$

uitgeverij | coutinho

c. $2^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2^3} \times \sqrt[4]{3} = \sqrt{8} \times \sqrt[4]{3}$

d. $g^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{g}}$

e. $r^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{r^2}}$

f. $\left(p^{\frac{7}{5}}\right)^2 = p^{\frac{14}{5}} = \sqrt[5]{p^{14}}$

2.12 **a.** $5 \cdot 9 + \left(\dfrac{10}{25}\right)^{-1} = 45 + \dfrac{25}{10} = 45 + 2{,}5 = 47{,}5$

b. $\dfrac{2^4}{3^4} \times \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3^2 \times 2^3} = \dfrac{2^3}{3^3} - \dfrac{1}{3^3 \times 2^3} = \dfrac{8}{27} - \dfrac{1}{216} = \dfrac{64}{216} - \dfrac{1}{216} = \dfrac{63}{216} = \dfrac{7}{24}$

c. $50(1{,}44 + 1{,}2 + 1) - 40(1{,}21 - 1{,}1) = 50 \cdot 3{,}64 - 40 \cdot 0{,}11 = 182 - 4{,}4 = 177{,}6$

d. $\left(\dfrac{29}{15}\right)^2 - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{16} = 3\dfrac{827}{1200} = 3{,}689$

2.13 **a.** $3^{-1} + 3^{-2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

b. $\sqrt[3]{64} + 2\sqrt{10} + 8 \cdot 10^{1,5} = 4 + 2\sqrt{10} + 80\sqrt{10} = \sqrt[3]{64} + 82\sqrt{10}$

c. $(2\sqrt{3})2 = 12$

d. $5^2 \times \frac{1}{10} + \sqrt[12]{5} = 2{,}5 + \sqrt[12]{5}$

2.14 **a.** $\sqrt[3]{p^5} \cdot \sqrt[4]{q^5}$

b. $2\sqrt{R}$

c. – (kan niet verder vereenvoudigd worden)

d. $\sqrt[5]{g^6}$

2.15 **a.** $F^{\frac{1}{4}}$

b. $x^{\frac{11}{12}}$

2.16 **a.** $p^1 \cdot p \cdot p^0 = p^2$

b. $b^{2p+3} \cdot b^{p+1} = b^{3p+4}$

c. $\dfrac{5^{2x+2}}{5^{x+2}} = 5^x$

d. $\dfrac{4b^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{b}} = 4$

2.17 **a.** $\left(\left(\dfrac{5^2}{d}\right)^3\right)^2 = \dfrac{5^6}{d^{12}}$

b. $6x^2 - 13xy + 6y^2$

2.18 Noemer uitwerken: $(1 + R) \cdot \left(1 - \dfrac{1+g}{1+R}\right) = R - g$

2.19 **a.** $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 441$

b. $1{,}5 + 2 + 2{,}5 + 3 + 3{,}5 - 0{,}5 = 12$

c. $58\frac{521}{630}$

d. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

uitgeverij coutinho

e. -720

f. 0

2.20 **a.** $5^x = 100/0{,}2$ dus $5^x = 500$. Hieruit volgt: $x = \log 500/\log 5 = 3{,}86$

b. $0{,}4^t = 4/6 = 2/3$, dus $t = \log(2/3)/\log 0{,}4 = 0{,}44$

c. $g^{10} = 2800/1800 \rightarrow g = (2800/1800)^{1/10} = 1{,}0452$, dus $g = 1{,}05$

d. $n = 11{,}90$

e. $g = 1{,}43$

f. $x = 3^4 = 81$

2.21 € $340.000 \cdot 0{,}975^{2{,}5} =$ € 319.147

2.22 **a.** $\left(\dfrac{1200{,}98}{1358{,}80}\right)^{\frac{1}{5}} = 1{,}025$ dus 2,5%

b. $\dfrac{\log \frac{2000}{1200{,}98}}{\log 1{,}025} = 20{,}7$ jaar

2.23 **a.** $80.000 \cdot 1.0275^6 = 94.141{,}47$

b. $40.274{,}89 \cdot 1.024^{-4} = 36.629{,}80$

2.24 $g^5 = 30/15$, dus $g^5 = 2 \rightarrow g = 2^{\frac{1}{5}} = 1{,}1487$. Dan: $F(t) = F(0) \cdot 1{,}1487^t = 15 \cdot 1{,}1487^t$

2.25 $g^5 = 3000/00$, dus $g = (3000/1700)^{1/5} = 1{,}12$. Dan is: $G(x) = G(0) \cdot 1{,}12^x$.
$G(0) = G(5) \cdot 1{,}12^{-5} = 963{,}33$, dus $G(x) = 963{,}33 \cdot 1{,}12^x$

2.26 Groeifactor is $g = 1 + 0{,}031 = 1{,}031$. Los op: $1{,}031^t = 2$. Hieruit volgt:
$t = \log 2/\log 1{,}031 = 22{,}7$ jaar.

2.27 $1{,}05^t = 3 \rightarrow t = \log 3/\log 1{,}05 = 22{,}5$ jaar, dus voor het eerst na 23 jaar.

2.28 $g^{26} = 8$ (staatsschuld is in 26 jaar verachtvoudigd), dus $g = 8^{\frac{1}{26}} = 1{,}083$, dus 8,3% per jaar.

2.29 $1{,}05^n = 2$, dus $n = \log 2/\log 1{,}05 = 14{,}2$ (maanden)

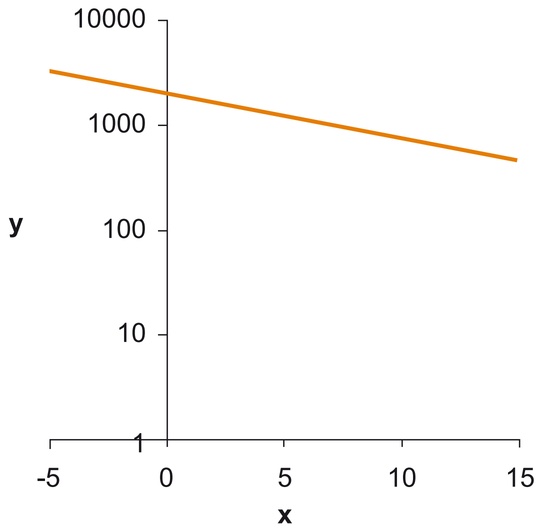
2.30 Groeifactor over zeven jaar: 1,44. De groeifactor per jaar is dan gelijk aan $\sqrt[7]{1{,}44}$ ofwel $1{,}44^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}05347$. Dus het gevraagde percentage bedraagt ongeveer 5,35.

2.31 Bijvoorbeeld $y(x) = 1000 \cdot 1{,}13^x$

2.32 Met de trendlijnmethode; zie antwoorden bij 2.24 en 2.25.

uitgeverij coutinho

2.33 Met de trendlijnmethode: $H(x) = 2000 \cdot e^{-0{,}099x} = 2000 \cdot 0{,}9057^{x}$.
Grafiek met logaritmische y-schaal:



2.34 **a.** $P(t) = 350 \cdot 0{,}85^{t}$ (met $t = 0$ op dit moment)
b. $P(5) = 350 \cdot 0{,}85^{5} = 155{,}30$ (euro)
c. 3,44 jaar, dus na 42 maanden

2.35 **a.** Groeifactor: $g^{1{,}5} = 2$ dus $g = \sqrt[1{,}5]{2} = 1{,}5874$.
$A(t) = A(0) \cdot 1{,}5874^{t} \cdot A(0)$, het aantal op tijdstip $t = 0$ is niet gegeven.
b. $1{,}5874^{t} = 10$, dus $t = \log 10 / \log 1{,}5874 = 5{,}0$ jaar

2.36 Voor bijvoorbeeld een eindkapitaal van € 10.000 en een interest van 4% (per jaar) kan als werkblad worden gebruikt:

	A	B
1	**Eindkapitaal**	10000
2	**Interest**	4%
3	**Looptijd**	15
4		
5	**Startkapitaal**	=B1*(1+B2)^-B3

Het antwoord is dan € 5552,65.

2.37 $1{,}02 + 1{,}02^2 + 1{,}02^3 + \ldots + 1{,}02^{50} = 86{,}27$. Voorbeeld van Excelwerkblad:

	A	B
1		1,02
2	1	=B1^A2
3	2	↓
4	3	kopiëren
5	4	↓
…	…	
…	…	
51	50	↓
52		=SOM(B2:B51)

2.38 $1{,}02 \times 1{,}02^2 \times 1{,}02^3 \times \ldots \times 1{,}02^{50} = 92.303.675.844{,}45$
Gebruik hetzelfde werkblad als in opgave 2.27, maar zet nu in cel B52: =PRODUCT(B2:B50).

Gemengde opgaven

2.39 **a.** x^{43} **b.** $a^{14}b^{29}$ **c.** $5x^2 + 5y^2$

2.40 **a.** $\sqrt[4]{8}$ **b.** $\sqrt[7]{6^8}$ **c.** $a\sqrt[4]{b^3}$ **d.** $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^7}}$ **e.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{p^7}}$ **f.** $1{,}04^{16}$

2.41 **a.** $\sqrt[3]{x^5}$ **b.** 0,5 **c.** $\sqrt[20]{y^{169}} = y^8 \cdot \sqrt[20]{y^9}$

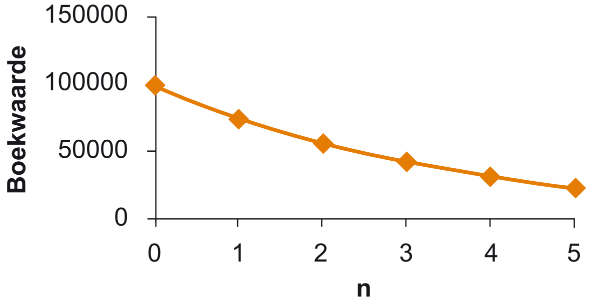
2.42 **a.** 59 **b.** 75 **c.** 301.600

2.43 **a.** De verhouding in kracht tussen beide aardbevingen is $\dfrac{10^{9,3}}{10^{9,0}} = 10^{0,3} \approx 2$
b. $\dfrac{10^{7,3}}{10^6} = 10^{1,3} \approx 20$

uitgeverij | c
coutinho

2.44 **a.** $B(3) = 100.000 \cdot 0{,}75^3 = 42.187{,}50$; $B(5) = 100.000 \cdot 0{,}75^5 = 23.730{,}47$

b. Een dalende exponentiële functie van n.



c. B is een lineaire functie van A.

d. $a = 1 - \sqrt[n]{\frac{B}{A}}$

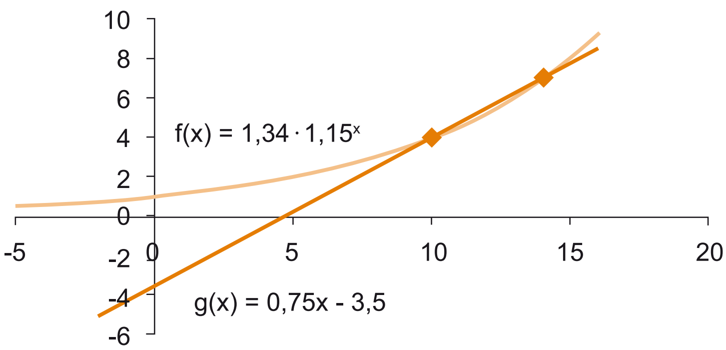
2.45 **a.** $g^5 = 273.526/100.000 = 2{,}73526$. Hieruit volgt: $g = 2{,}73526^{\frac{1}{5}} = 1{,}2229$, dus 22,3%.

b. $S = 100000 \cdot 1{,}2229^t$

2.46 **a.** $g^4 = \frac{7}{4} = 1{,}75$ dus $g = 1{,}75^{\frac{1}{4}} = 1{,}15$. Startwaarde is bijvoorbeeld te berekenen door: $4 \cdot 1{,}15^{-10} = 0{,}99$. Dus $f(x) = 0{,}99 \cdot 1{,}15^x$.

b. De richtingscoëfficiënt $= \Delta y/\Delta x = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Dus $y = 0{,}75x + b$. Punt (10, 4) ligt op de lijn, dus $4 = 0{,}75 \cdot 10 + b$. Hieruit volgt $10 = 7{,}5 + b$, dus $b = -3{,}5$. Conclusie: $g(x) = 0{,}75x - 3{,}5$.

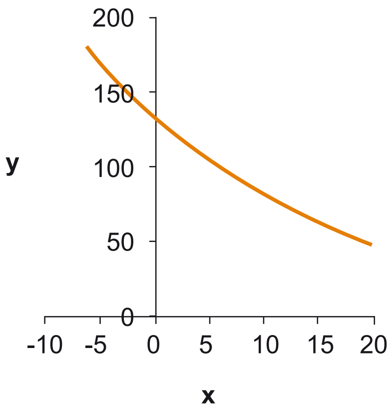
c. Grafieken:

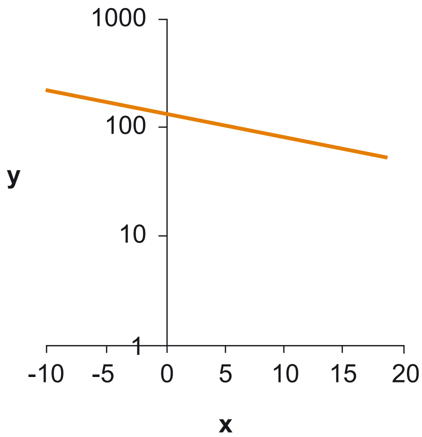


2.47 **a.** Excel geeft met de trendlijnmethode: $y = 132{,}74 \cdot e^{-0{,}0505x} = 132{,}74 \cdot 0{,}95^x$

b. $132{,}74 \cdot 0{,}95^{10} \approx 79{,}5$ en $132{,}74 \cdot 0{,}95^{10{,}5} \approx 77{,}5$

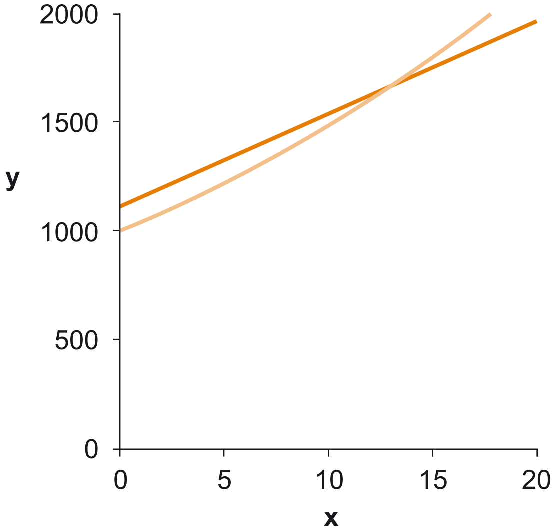
c.



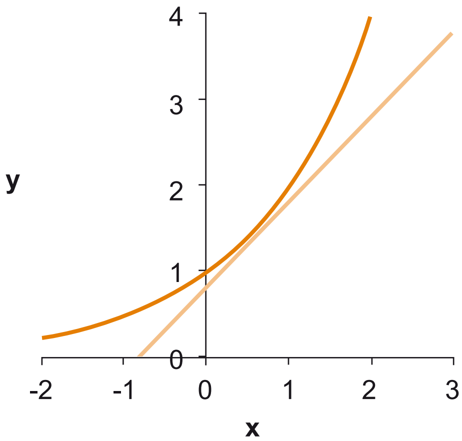


2.48 **a.** Excels Oplosser geeft $x = 13{,}32$ als snijpunt $(y = 1686)$.

b.



2.49 **a.** Oplosser geeft voor de vergelijking $2^x = x + 0{,}8$ geen oplossingen. De grafiek van beide functies bevestigt dit:



b. $a \geq 0{,}914$ (gevonden door 'trial and error')

2.50 $1000 \cdot 1{,}04^x = 2000 \cdot 1{,}03^x$. Dan is $x = \log 2 / \log(1{,}04/1{,}03) = 71{,}7$ jaar.
Kan ook met Oplosser of Doelzoeken in Excel worden opgelost.

2.51 Schrijf de uitkomsten als machten van de gebruikte grondtallen.
De oplossingen zijn dan de exponenten 5, 6 en 4:

a. $2^x = 2^5$

b. $3^x = 3^6$

c. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-4} = \left(\frac{1}{4}\right)^4$

2.52 **a.** $1{,}0410 = 1{,}4802$, dus 48% toename.

b. $1{,}04^n = 2$, dus $n = \log 2 / \log 1{,}04 = 17{,}6$, dus voor het eerst na 18 jaar.

2.53 **a.** $p^{-2}p^3q^{-2}q^{-1} = pq^{-3} = p/q^3$

b. $p^{-6}p^6q^{-1}p^{-3}p^3q^{-1} = q^{-2} = 1/q^2$

2.54 **a.** $\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} \times \sqrt{x} = \dfrac{2 \cdot x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{4}}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot x^{\frac{1}{3}} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} = 2x^{\frac{1}{12}}$

b. $\dfrac{\sqrt[5]{p}}{\sqrt[5]{p^3}} : \left(\sqrt{p}\right)^4 = \dfrac{p^{\frac{1}{5}}}{p^{\frac{3}{5}}} \cdot p^{-2} = p^{-\frac{12}{5}}$

2.55 $g^{10} = 4$ dus $g = 4^{\frac{1}{10}} = 1{,}1487$ dus 14,87%

2.56 **a.** $g^{40} = 500$, dus $g = 500^{\frac{1}{40}} = 1{,}168$

b. $(1 + R)^{360} = 1000$, dus $1 + R = 1000^{\frac{1}{360}} = 1{,}019$, dus $R = 0{,}019$

2.57 $g^2 = 1{,}99965/1{,}65 = 1{,}21$, dus $g = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1$.
Dan is functie: $y = a \cdot 1{,}1^x$. Daarin bijvoorbeeld (x,y) = (1; 1,65) invullen:
$1{,}65 = a \cdot 1{,}1^x$, dus $a = 1{,}65/1{,}1 = 1{,}5$. Dus functie is $y = 1{,}5 \cdot 1{,}1^x$.

2.58 **a.** $\left(\sqrt[12]{x}\right)^4 \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{4}{12}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x$

b. $(p^4q^3)^2 p^{-2}/q^4 = p^8q^6p^{-2}/q^4 = p^6q^2$

2.59 **a.** $p^0 = 1$

b. $q^1 = q$

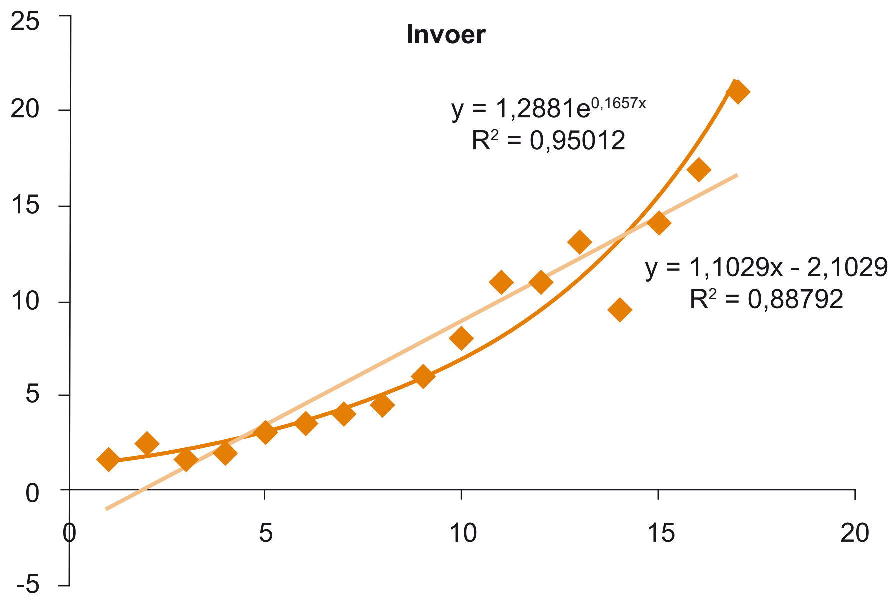
c. $a^7 : (a^3)^4 \cdot a^{-20} = a^7 \cdot a^{-12} \cdot a^{-20} = a^{-25} = \dfrac{1}{a^{25}}$

d. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{3\frac{1}{2}} = 5^3 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^3 \cdot \sqrt{5}$

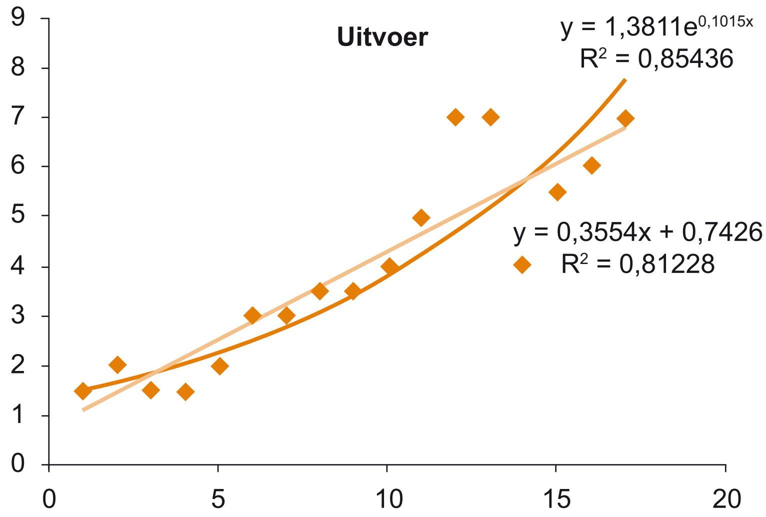
e. $\dfrac{6x^2 \cdot y^2 \cdot y^{-6} \cdot x^3}{18x^{-6} \cdot y^7} = \dfrac{x^{11}}{3y^{11}}$

Praktijkcases

2.60 **a.** Het exponentiële model, want daar is de R^2 het grootst: 0,9501 (zie de grafiek).

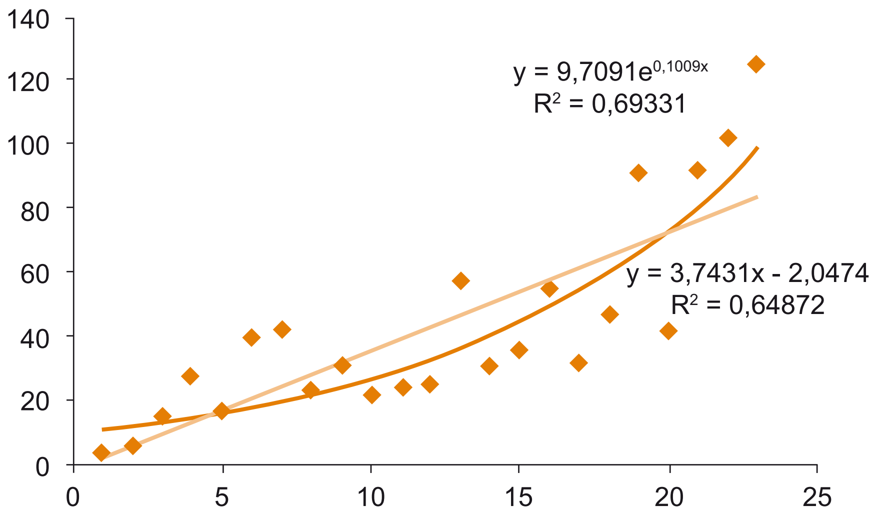


b. Ook hier het exponentiële model, want dat heeft een iets grotere R^2-waarde; zie de grafiek.



c. Zie de grafieken.

2.61 **a./b.** Zie de grafiek hierna. De beide R^2-waarden ontlopen elkaar niet veel en zijn ook niet al te groot (de vuistregel is: $R > 0{,}80$, dan goede weergave). Er is dus weinig verschil tussen het lineaire en het exponentiële model.



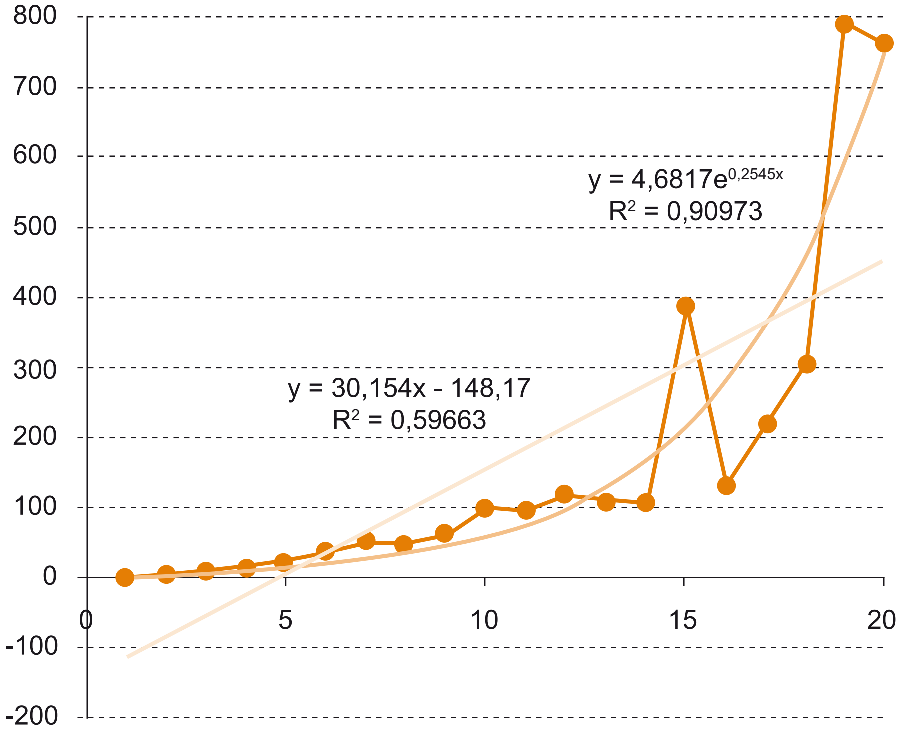
uitgeverij coutinho c

2.62 **a.** Zie de grafiek hierna.

b. Het exponentiële model verklaart hier veel beter: R^2-waarde 0,9097 tegen 0,5966.

c. Lineair: $y = 30{,}154x - 148{,}17$

Exponentieel: $y = 6{,}6817 \cdot e^{0{,}2545x} \approx 6{,}6817 \cdot \left(2{,}71828^{0{,}2545}\right)^x \approx 6{,}6817 \cdot 1{,}29^x$



uitgeverij | coutinho C

3 Andere economische verbanden

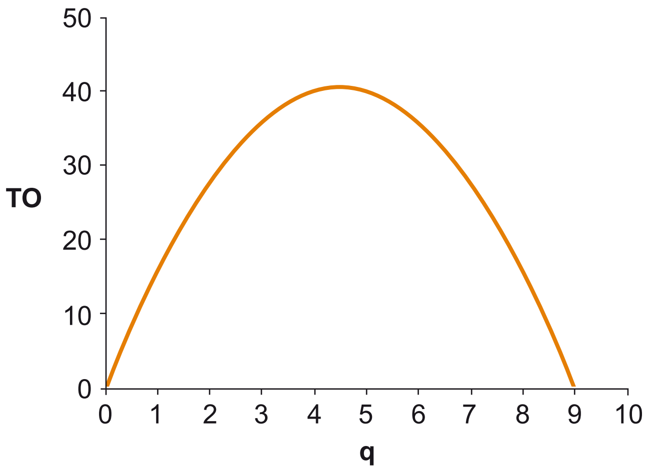
3.1 **a.** Los op: $TO = 0 \rightarrow -2q^2 + 18q = q \cdot (-2q + 18) = 0$, dus $q = 0$ of $q = 9$. TO is een bergparabool en heeft dus alleen een economische betekenis als $0 \leq q \leq 9$.

b De symmetrieas heeft vergelijking $x = -b/2a = -18/-4 = 4{,}5$. De top van de parabool TO is dus $TO(4{,}5) = 40{,}5$ en is een maximum.

c. $p = -2q + 18$, direct af te lezen uit $TO = p \cdot q$

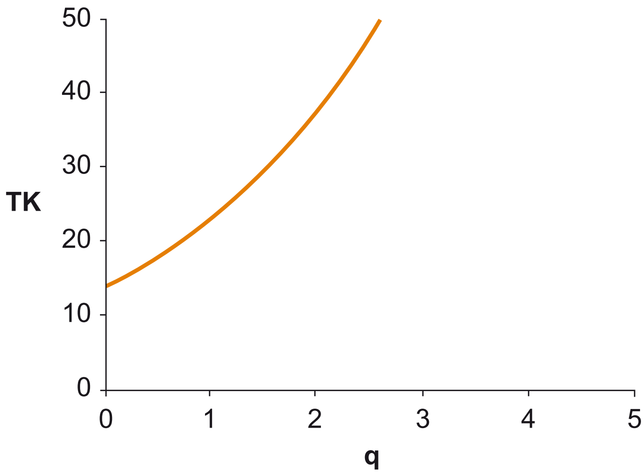
d. Symmetrieas heeft vergelijking $q = -b/2a = 4{,}5$ (het midden van de twee nulpunten), dus $p = -2 \cdot 4{,}5 + 18 = 9$.

e.



3.2 **a.** Symmetrieas heeft vergelijking $q = -b/2a = -1$. Invullen geeft $TK = 11$. Economisch heeft dit punt geen waarde.

b. Zie de grafiek; alleen getekend voor $q < 0$.



uitgeverij | coutinho

3.3 **a.** Met de abc-formule: $x = -3$ en $x = -0{,}5$.

b. $q^2 - 5q - 3 = 0$. Oplossingen zijn: $q = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2} = -0{,}54$ en 5,54.

c. Omdat hier al in twee factoren is ontbonden, zijn de oplossingen af te lezen: 14 en 15.

d. De discriminant van deze vergelijking is -20; er zijn dus geen oplossingen.

e. Oplossingen zijn 0,5 en 2.

f. Schrijf als $6x^2 = -15$. Links altijd positief of 0; rechts -15. Er zijn dus geen oplossingen.

g. $x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow x = 0$ of $x = 1$

h. $-4q^2 + 2q - 7 = 0$. Heeft geen oplossingen: $D = -108$.

i. $2x^2 + 8x + 8 = 0$. Heeft één $(D = 0)$ oplossing: -2. Kan ook door als volgt te redeneren: $x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 0$.

3.4 **a.** $(x-4)(x-6) = 0$

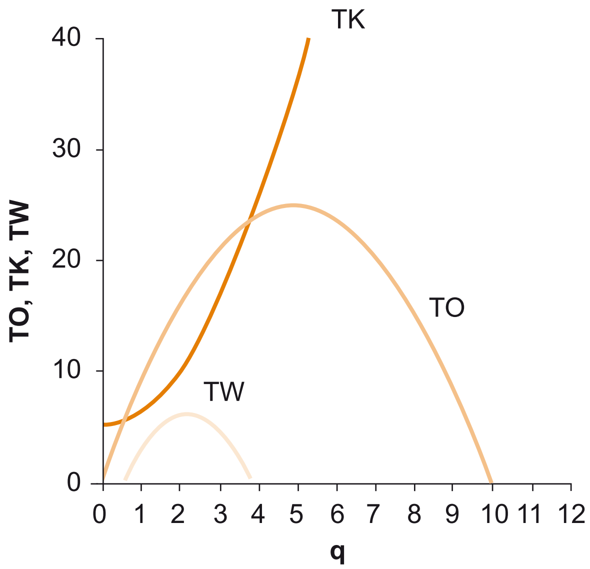
b. $(x-7)2 = 0$

c. $x^2 = -1$

d. $q(q-16) = 0$

e. $(x-7)^2 = 0$

3.5 **a.**



b. $TO = TK \rightarrow -q^2 + 10q = 1{,}25q^2 + 5 \rightarrow -2{,}25q^2 + 10q - 5 = 0$. Met de abc-formule geeft dit de oplossingen $(-10 \pm \sqrt{55})/-4{,}5 = 0{,}57$ en 3,87.

c. De maximale winst treedt op bij $q = (0{,}57 + 3{,}87)/2 = 2{,}22$ (of met de formule van de symmetrieas $-b/2a$). $TW(2{,}22) = 6{,}11$.

d. Zie de grafiek bij onderdeel a.

3.6 Als er geen afzet is, is er ook geen omzet, met andere woorden: als $q = 0$ dan ook $TO = p \cdot q = 0$.

uitgeverij | c
coutinho

3.7 Zie de antwoorden bij 3.3. Als voorbeeld nemen we onderdeel b. We brengen de vergelijking op 0, dus $q^2 - 5q - 3 = 0$. Kies bijvoorbeeld in A2 de waarde 0. Zet in cel B2 de formule: =A2^2-5*A2-3.

	A	B
1	x	functiewaarde
2	0	=A2^2−5*A2−3

Voer de stappen uit:
1. 'Gegevens'
2. 'Oplosser'
3. 'Cel bepalen:' B2
4. 'Gelijk aan:' vink 'Waarde' aan, en vul 0 in
5. 'Door veranderen cel:' vul A2 in
6. 'Oplossen'

Het resultaat is:

	A	B
1	x	waarde
2	−0,54138	−3,06E-07

Bij een 'startwaarde' (A2) van 3 krijgen we met de Oplosser de tweede oplossing 5,54.

3.8 Kies een x-waarde in cel A2 (bijvoorbeeld 0) en typ de formule voor de functie f(x) in cel B2:

	A	B
1	x	f(x)
2	0	−0,126*(x−56,6)^2+58

Roep de Oplosser op en laat dit programma naar een maximum (bergparabool!) zoeken. Resultaat:

1	x	f(x)
2	56,6	58

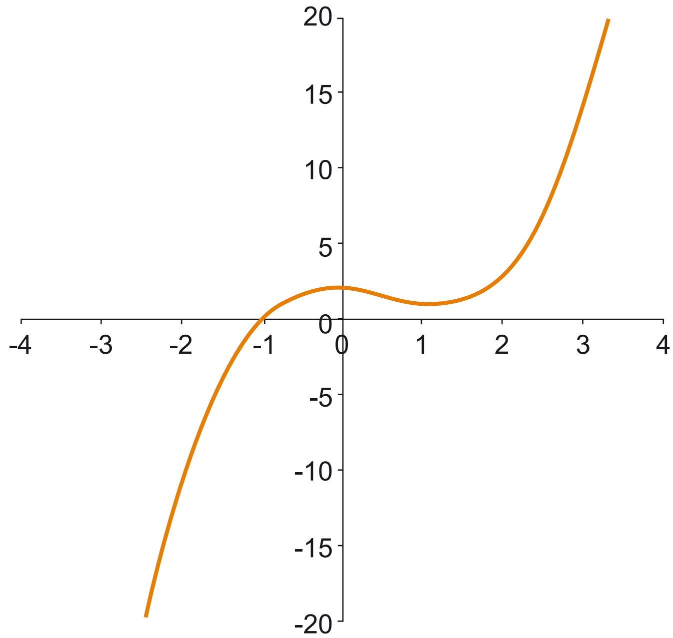
3.9 Met dezelfde methode als in opgave 3.8 moet nu het minimum worden gezocht. Dit is bij $x = -52{,}72$; het minimum is dan $f(-52{,}72) = -18.021{,}63$.

uitgeverij | coutinho c

3.10 De parabolen $f(x) = x^2$ en $-x^2 - 1$ snijden elkaar niet. Bij het bepalen van snijpunten met de Oplosser verschijnt de mededeling 'Oplosser heeft geen werkbare oplossing gevonden'.

3.11
- **a.** Ja, van graad 6.
- **b.** Ja, van graad 14.
- **c.** Nee, 2^x is geen polynoom, maar een exponentiële functie.
- **d.** Nee, $1/x = x^{-1}$ is wel een macht (van x), maar geen polynoom.
- **e.** Nee, x^{-6} is wel een macht, maar geen polynoom.
- **f.** Ja, graad is 5.
- **g.** Ja, van graad 2 (mits $a \neq 0$).
- **h.** Ja, van graad 0 (want $1 = x^0$).

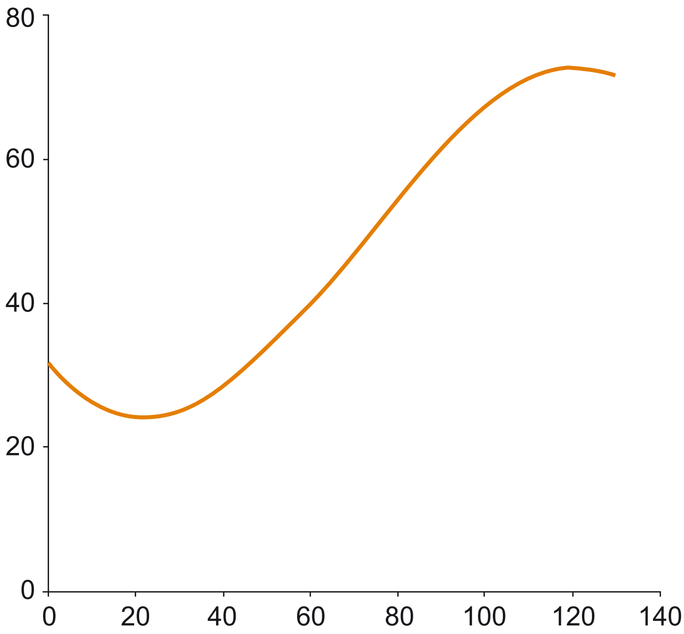
3.12



Het (lokaal) minimum is 0,96, bij $x = 1{,}15$. Het (lokaal) maximum is 2,04, bij $x = -0{,}15$. Beide zijn te vinden met de Oplosser en de methode die in opgave 3.8 gebruikt is. De startwaarde moet niet 'te ver uit de buurt' worden gekozen. De functie is degressief dalend tussen $x = -0{,}15$ en $x = 1{,}15$ en progressief stijgend vanaf $x = 1{,}15$.

uitgeverij coutinho C

3.13 **a.**

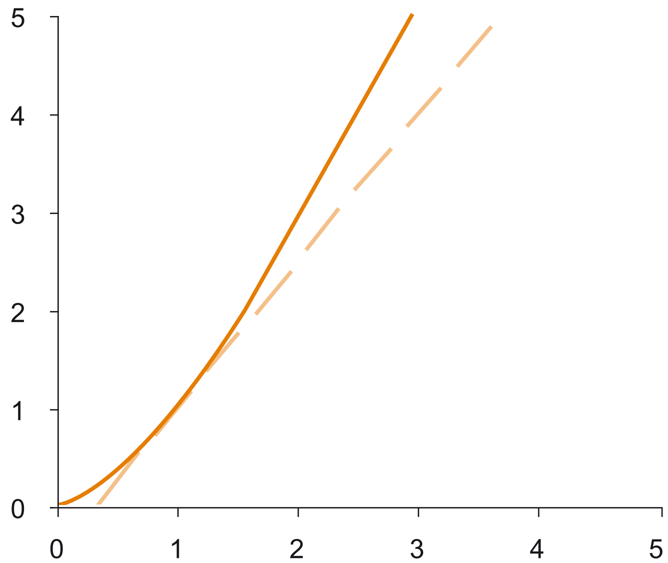


b. Een dalende kostenfunctie voor waarden tussen 0 en ongeveer 20 en vanaf ongeveer 120 is niet erg realistisch.

c. Met de Oplosser volgt een lokaal minimum van TK = 23,99 bij q = 21,75 en een lokaal maximum van 72,93 bij q = 121,05.

3.14 **a.** $f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} = x^{1\frac{1}{2}}$ is een machtsfunctie (van de variabele x).

b.

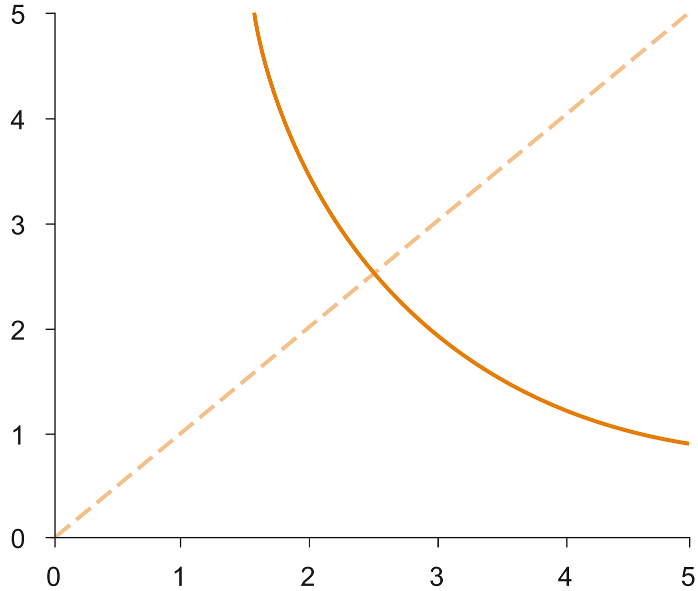


c. Ja, een lokaal (rand)minimum 0 voor x = 0.

d. Bereken met de Oplosser het enige snijpunt van de twee functies f(x) en k(x): (1;1).

3.15 **a.** De functie m(x) is een machtsfunctie.

b.

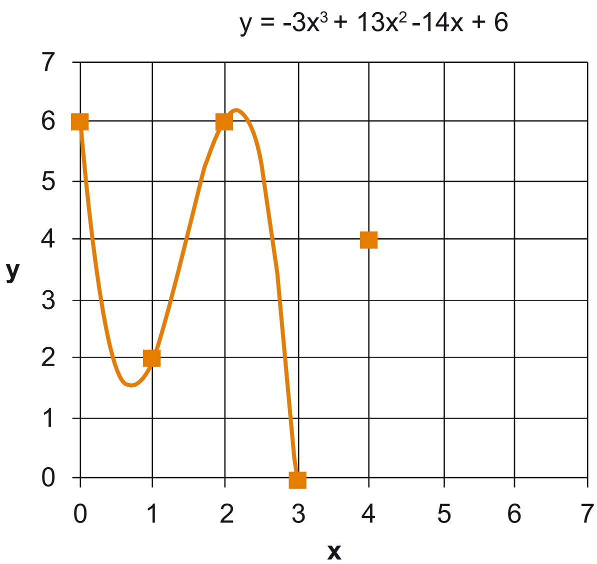


c. De x-as is de horizontale en de y-as is de verticale asymptoot.

d. Met de Oplosser (verschil tussen m(x) en y = x op waarde nul laten zetten) volgt het snijpunt (2,35;2,35).

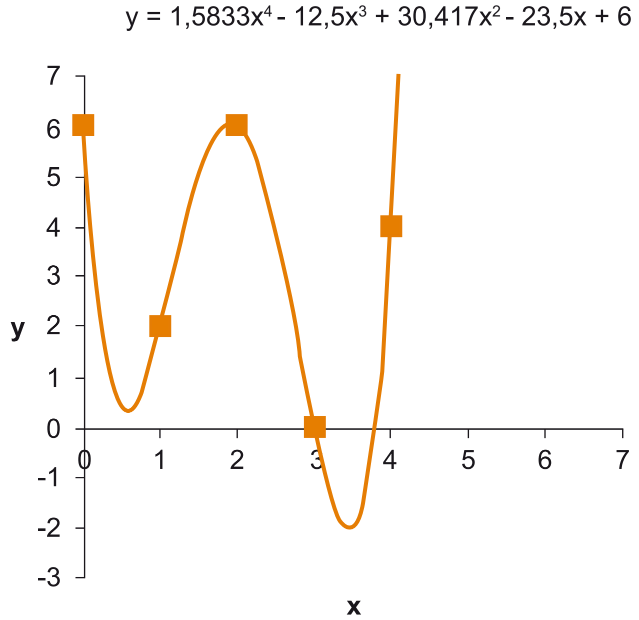
3.16 BMI is een lineaire functie van g.

3.17 **a.** $y(x) = -3x^3 + 13x^2 - 14x + 6$ (zie grafiek), bepaald met de trendlijnmethode en keuze voor 'Polynoom', 'Volgorde' 3.



uitgeverij coutinho C

b.



c. Excel geeft $y = 2 \cdot x^{0,5}$, ofwel $y = 2\sqrt{x}$.

d. $y = 9 \cdot x^{-0,585}$

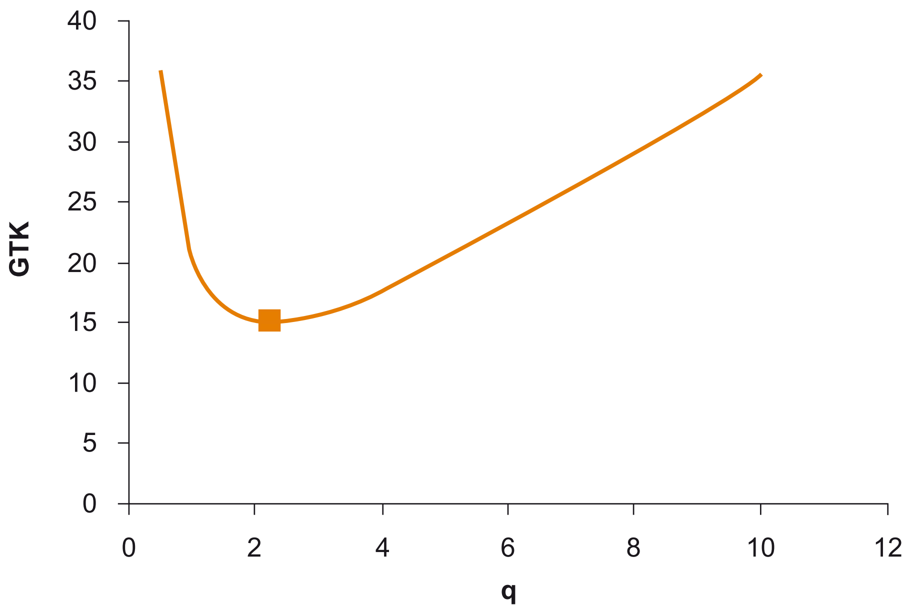
e. Niet mogelijk: een machtsfunctie gaat niet door de x-as.

3.18 **a.** $3{,}4q^2 + 17 = 102$ dus $3{,}4q^2 = 85$, dus $q^2 = 25$ dus $q = 5$

b. $(3{,}4q^2 + 17)/q = 20$, dus $3{,}4q^2 - 20q + 17 = 0$. Met de abc-formule volgt $q = (20 \pm \sqrt{168{,}8})/6{,}8$ dus $q = 1{,}03$ of $q = 4{,}85$.

c. Bereken in Excel een redelijk aantal puntenparen van GTK, bijvoorbeeld van $x = 0{,}5$ tot $x = 10$ in stappen van 0,5. Voeg een spreidingsdiagram toe, nu het type 'in vloeiende lijnen'. De grafiek is hieronder afgebeeld. Bij $q = \sqrt{5}$ is het minimum 15,21. Het is ook mogelijk met de Oplosser naar dit minimum te zoeken. Antwoord is dus: alle waarden groter dan of gelijk aan 15,2.

Grafiek van $GTK = (3{,}4q^2 + 17)/q$:



3.19 Oplossen van de vergelijking GTK = 9 levert, met kruislings vermenigvuldigen: $0{,}3q^2 + 5q + 8 = 9q$, dus $0{,}3q^2 - 4q + 8 = 0$. De oplossing van deze kwadratische vergelijking is (afgerond) bij 25 en 109 stuks per week.

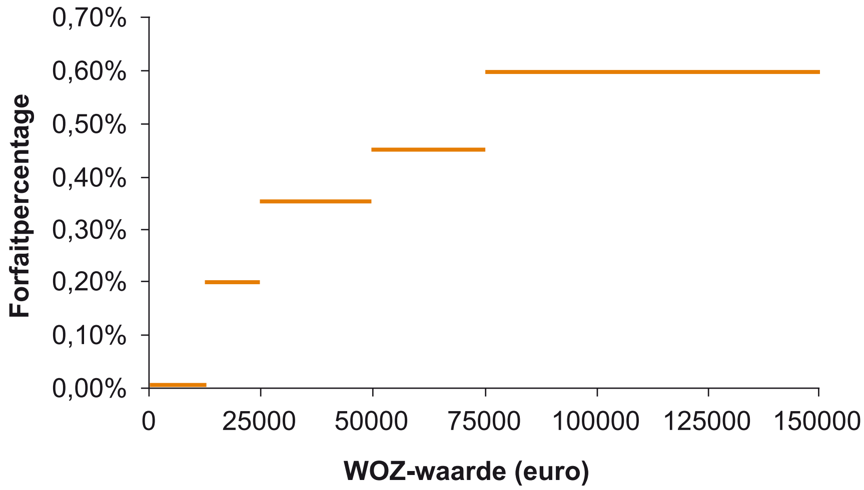
3.20 $1/d = 4{,}25 - d$. Na kruislings vermenigvuldigen volgt: $1 = 4{,}25d - d^2$, ofwel $d^2 - 4{,}25d + 1 = 0$. De oplossing van deze kwadratische vergelijking is $d = 0{,}25$ en $d = 4$.

3.21 Gelijknamig maken levert: $\dfrac{2x}{4x^2} + \dfrac{1}{4x^2} = 1$ dus $\dfrac{2x+1}{4x^2} = 1$.
Kruislings vermenigvuldigen geeft de kwadratische vergelijking $4x^2 - 2x - 1 = 0$.
Deze heeft oplossingen $x = (2 \pm \sqrt{20})/8 = -0{,}3090$ of $0{,}8090$.

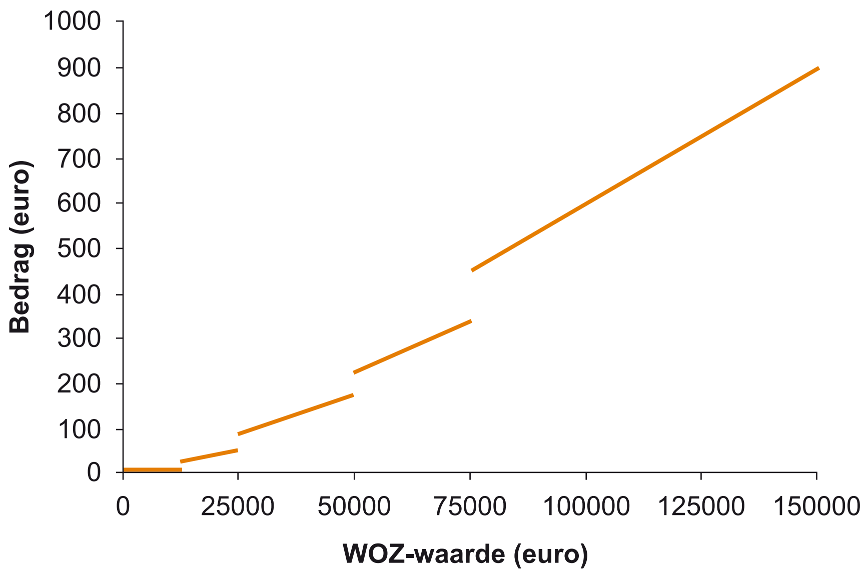
3.22 Gelijkstellen van aanbod- en vraagfunctie levert: $\frac{4000}{p} = 3p - 500$, dus $4000 = 3p^2 - 500p$, ofwel $3p^2 - 500p - 4000 = 0$. De positieve oplossing van deze kwadratische vergelijking is $p = 174{,}32$. Invullen levert $q = 23$.

3.23 Snijd 7x met 2001×6. Uitkomst is 1715,14. Dus bij 1716 artikelen of meer is het economisch gunstiger om 2000 artikelen af te nemen.

3.24 **a.**



b.

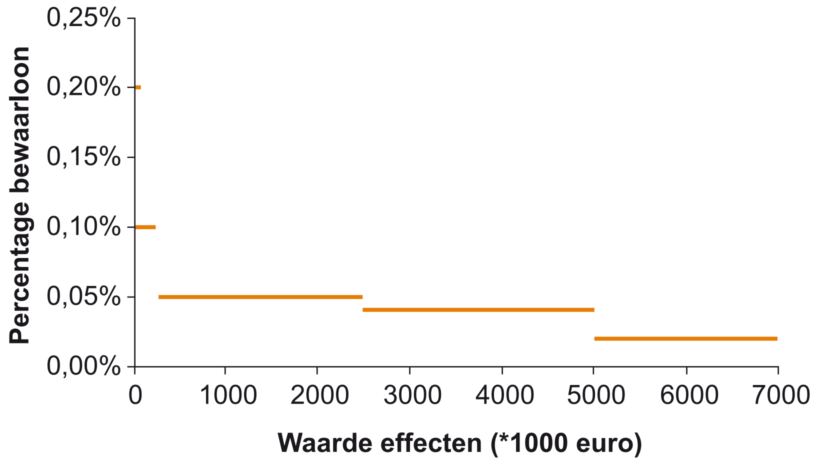


uitgeverij | coutinho C

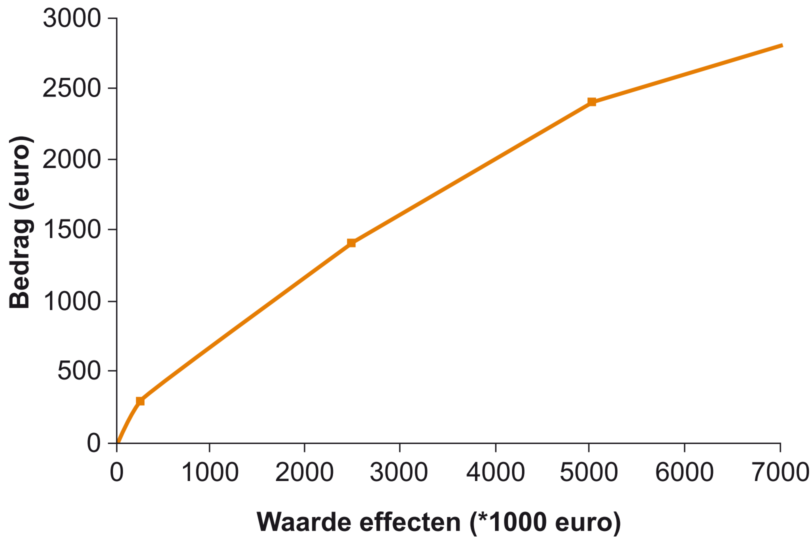
c. Alle lijnen die horen bij de klassen 1 t/m 5 gaan door de oorsprong (0;0).

d. Het grafiekdeel van de zesde klasse heeft het functievoorschrift $B(x) = 7350 + 0{,}018 \times (x - 1.040.000)$. De lijn gaat niet door de oorsprong, want $B(0) = -18.720$. Deze lijn loopt dus veel steiler dan de ander vijf.

3.25 **a.**

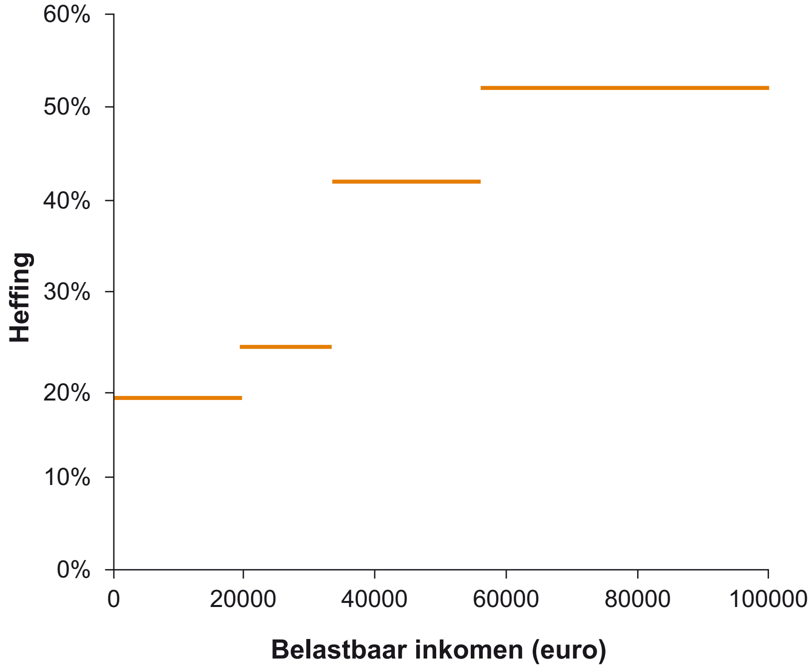


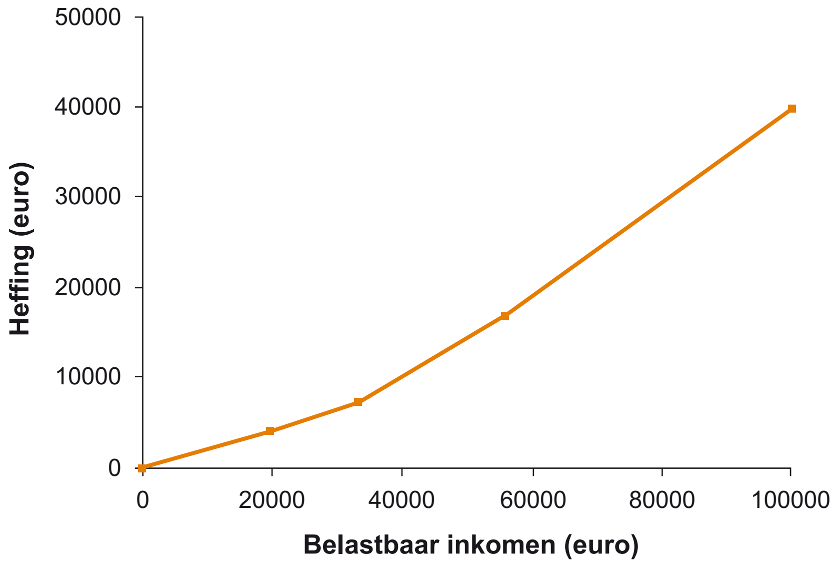
b.



uitgeverij coutinho

3.26

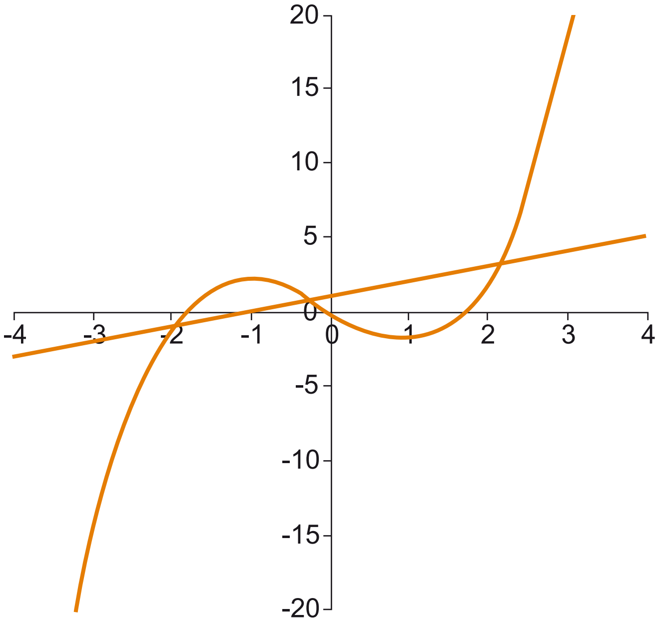




Belastbaar inkomen			Totaal tarief	Max. per schijf	Heffing schijven
0	t/m	19645	19,1%	3752	3752
19646	t/m	33363	24,1%	3306	7058
33364	t/m	55991	42%	9504	16562
55992			52%		

Gemengde opgaven

3.27 **a.**



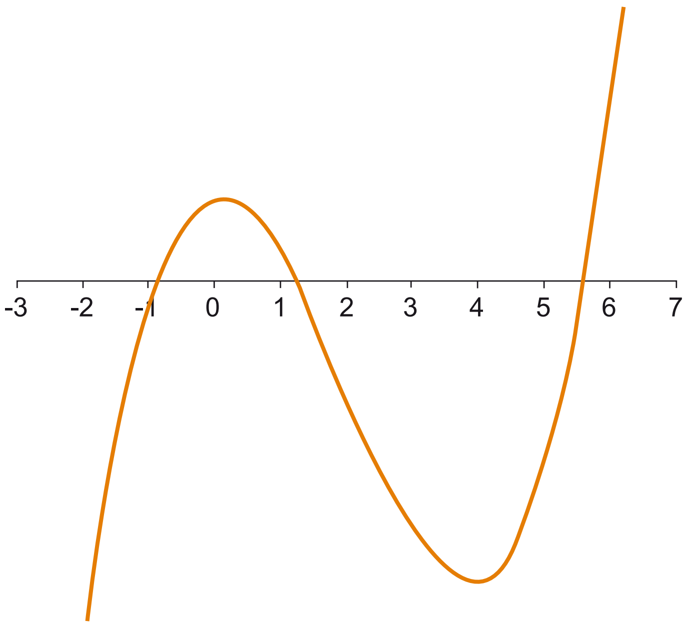
b. Nulpunten zijn $-\sqrt{3}$, 0 en $\sqrt{3}$; lokaal minimum is (1;−2), lokaal maximum is (−1;2).

c. Progressief stijgend vanaf $x = 1$; degressief stijgend tot aan $x = -1$.

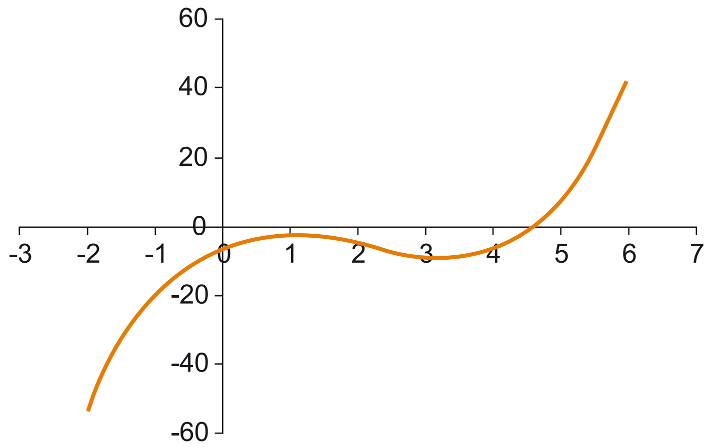
d. Er zijn drie snijpunten (zie grafiek), gevonden met de Oplosser: (−1,86;−0,86), (−0,25;0,75) en (2,11;3,11).

3.28 De oplossingen zijn $\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)/2$, dus, afgerond op drie decimalen, −1,618 en 0,618.

3.29 Lokaal minimum (3,15;−9,08); lokaal maximum (0,85;−2,92).



uitgeverij coutinho c



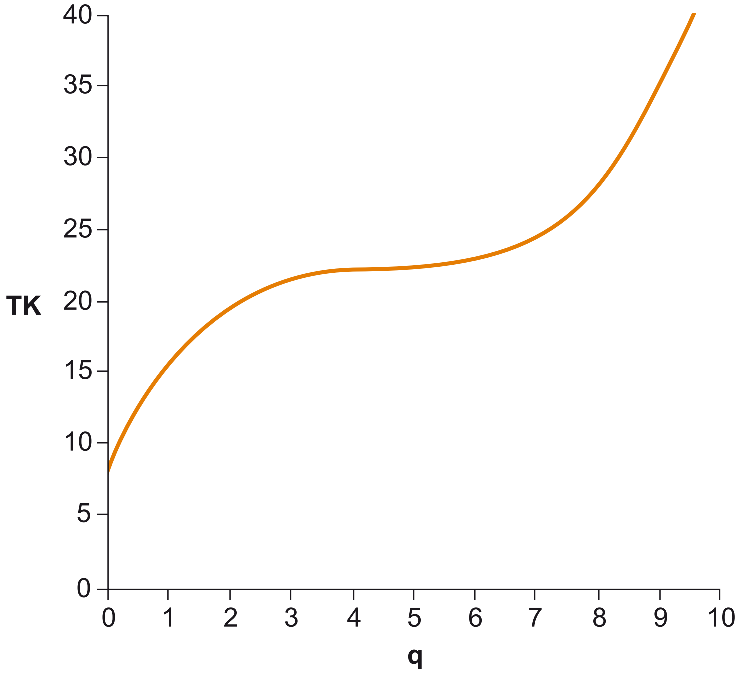
3.30 **a.** $y = 0{,}4x + 0{,}6$

b. bijvoorbeeld $y = -0{,}1x^2 + 1{,}1x$ (door extra punt (0;0)) of
$y = -0{,}15x^2 + 1{,}45x - 0{,}3$ (door (2;2))

c. $y = 0{,}803 \cdot 1{,}246^x$

3.31 **a.** $TK(3) = 21{,}05$; dus $21{,}05 \times$ € $100.000 =$ € $2.105.000$

b.



c. TK = 30 oplossen met Oplosser-methode. Antwoord: $q = 8{,}196{,}1$, dus 8196 producten

d. Bij ongeveer 4500 stuks per dag ($q = 4{,}5$) neemt TK het minst toe.

3.32 **a.** $y = -0{,}6667x^2 + 3{,}6667x - 2$

b. $y = 0{,}2667x^3 - 2{,}8x^2 + 8{,}7333x - 5{,}2$

c. $y = -x + 6$

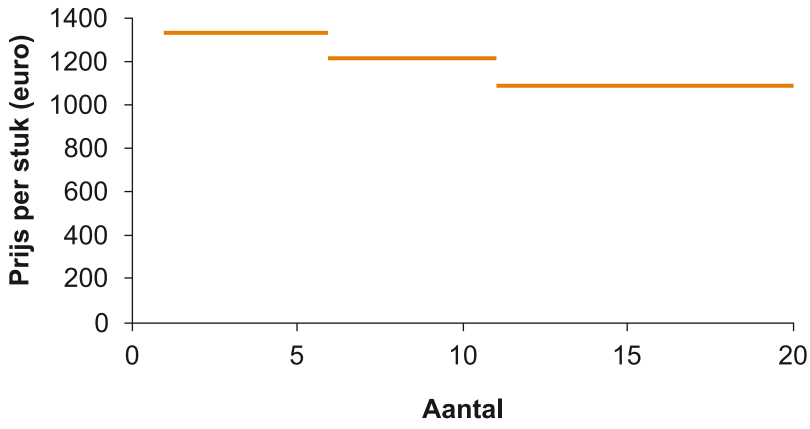
d. $y = 14{,}112 \cdot x^{-1{,}4094}$

e. $y = 10{,}125 \cdot e^{-0{,}4055x} = 10{,}125 \cdot 0{,}667^x$

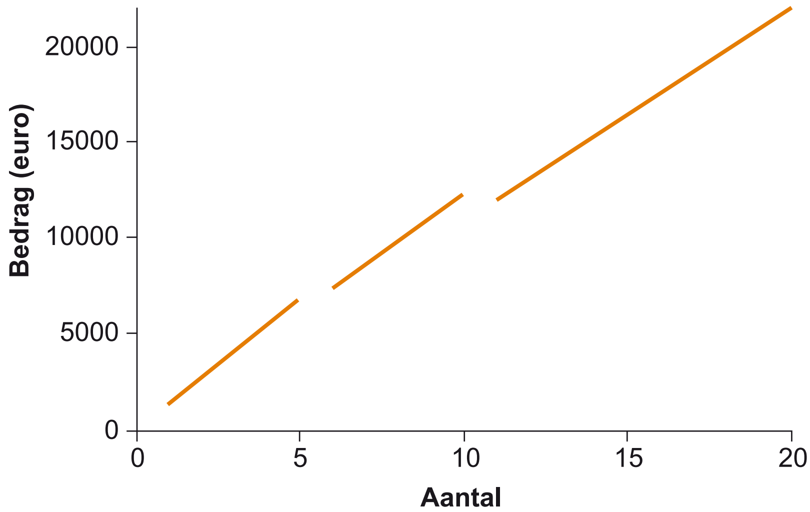
3.33 **a.** Kwadratische vergelijking met oplossingen $(6 \pm \sqrt{20})/0{,}8 = 13{,}1$ en 1,9.

b. GTK is minimaal voor q = 5 (GTK is dan 10). Methode: Oplosser.

3.34 **a.**



b.



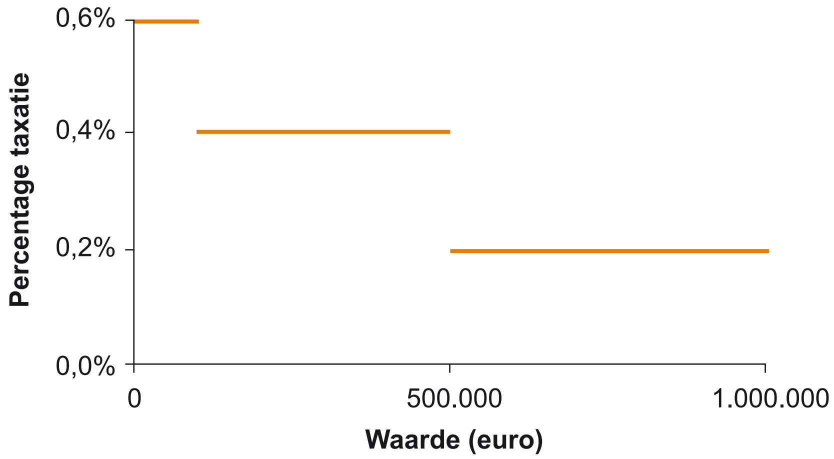
c. Bij het voornemen tot aankoop van tien exemplaren is het economisch voordeliger om elf exemplaren aan te schaffen.

3.35 **a.** Ja, vast tarief € 140 en daarbij:

Bedragen				Perc.
	0	tot	100000	0,60%
over het meerdere van	100000	tot	500000	0,40%
over het meerdere van	500000			0,20%

uitgeverij coutinho

b. Grafiek taxatietarief:



c. Grafiek taxatiekosten:

uitgeverij coutinho

4 Financiële rekenkunde

4.1 **a.** $11.225 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 3{,}5) = 13.189{,}38$
b. $11.225 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot [5/12]) = 11.458{,}85$
c. $11.225 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot [55/12]) = 13.797{,}40$
d. $11.225 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot [278/365]) = 11.652{,}47$

4.2 **a.** $I = \text{Interestvergoeding} = K \cdot i \cdot n = 658{,}75 \rightarrow K \cdot 0{,}06 \cdot 17/12 = 658{,}75 \rightarrow K = 7750$
b. $I = K \cdot i \cdot n = 4780 \cdot 0{,}04 \cdot 26/12 = 414{,}27$
c. $I = K \cdot i \cdot n \rightarrow 3168 = 9600 \cdot i \cdot 72/12 = 0{,}055$ dus 5,5%
d. $6500 \cdot 0{,}0725 \cdot n = 294{,}53 \rightarrow n = 294{,}53/(6500 \cdot 0{,}0725) = 0{,}625$ jaar $\approx 0{,}625 \cdot 12$ $= 7{,}5$ maanden

4.3 **(i)** Interestvergoeding is $2545{,}39 - 2500 = 45{,}39 = K \cdot i \cdot n$, dus $45{,}39 = 2500 \cdot 0{,}0275 \cdot n$. Dus $n = 45{,}39/(2500 \cdot 0{,}0275) = 0{,}6602$ jaar. In dagen is dit $0{,}6602 \cdot 365 = 241$ dagen.
(ii) Voor de looptijd n geldt: $2.500 \times 1{,}0275^n = 2.545{,}39$ hetgeen leidt tot $1{,}0275^n = 1{,}018156$.

Dus $n = \log^{1{,}0275} 1{,}018156 = \dfrac{\log 1{,}018156}{\log 1{,}0275} = 0{,}663$, dus het aantal dagen $= 365 \times 0{,}663 = 242$.

4.4 **a.** Enkelvoudige interestvergoeding, want het gemiddelde is berekend door de vijf jaarrenten op te tellen en door 5 te delen (!): $(0{,}8 + 1{,}6 + 2{,}1 + 2{,}5 + 3{,}5)/5 = 2{,}1\%$.
b. Dit is een rekenkundig gemiddelde.
c. Bij samengestelde interest zou de gemiddelde groeifactor zijn geweest: $\sqrt[5]{1{,}008 \cdot 1{,}016 \cdot 1{,}021 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}035} = \sqrt[5]{1{,}101364216\ldots} = 1{,}019497564\ldots$, dus een gemiddelde jaarinterest van 1,950%. Dit is een meetkundig gemiddelde.
d. Enkelvoudig: $1000(1 + 5 \cdot 0{,}021) = 1105$;
samengesteld: $1000 \cdot 1{,}008 \cdot 1{,}016 \cdot 1{,}021 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}035 = 1109{,}29$.

4.5 **a.** Groeifactor is $1{,}034^{\frac{1}{12}} = 1{,}00279 = 1 + i$, dus 0,28% per maand.
b. $1{,}024^{\frac{1}{4}} = 1{,}005947$, dus 0,59% per kwartaal
c. $1{,}028^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1{,}028} = 1{,}0139$, dus 1,39% per halfjaar

4.6 **a.** Groeifactor per jaar is $1{,}033^2 = 1{,}0671 = 1 + i$, dus 6,71% per jaar.
b. $1{,}011^4 = 1{,}0447$ dus 4,47% per jaar
c. $1{,}0025^{12} = 1{,}0304$, dus 3,04% per jaar

4.7 **a.** $EW = 25.000 \cdot 1{,}05^{12} = 44.896{,}41$
b. $CW = 50.000 \cdot 1{,}06^{-20} = \dfrac{50.000}{1{,}06^{20}} = 15.590{,}24$

uitgeverij coutinho C

4.8 $EW = 1500 \cdot 1{,}035^{11} + 2000 \cdot 1{,}035^{10} = 5011{,}15$

4.9 Het antwoord is de som van de contante waarde van die vier cashflows:
$120.000 \cdot 1{,}08^{-1} + 140.000 \cdot 1{,}08^{-2} + 160.000 \cdot 1{,}08^{-3} + 140.000 \cdot 1{,}08^{-4} = 461.055{,}88$

4.10 Dit de postnumerando contante waarde van twintig bedragen van € 5600:
$$CW = 5600 \cdot \frac{1 - 1{,}045^{-20}}{0{,}045} = 72.844{,}44$$

4.11 $CW = 295 \cdot \dfrac{1 - 1{,}01^{-18}}{0{,}01} = 4837{,}49$

4.12 De contante waarde van de zestig postnumerando termijnen (T) moet het geleende kapitaal van € 15.000 opleveren:
$$15.000 = T \cdot \frac{1 - 1{,}006^{-60}}{0{,}006} \rightarrow 15.000 = 50{,}262\ldots T \rightarrow T = 298{,}44$$

4.13 $CW = 17.500 \cdot \dfrac{1 - 1{,}015^{-10}}{0{,}015} = 161.388{,}23$

4.14 De maandinterest volgt uit $1{,}049^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}003994\ldots$ Let op: de interest niet tussentijds afronden! De drie punten symboliseren onafgeronde waarden. Dan volgt:
$$CW = 1024 \cdot \frac{1 - 1{,}003994\ldots^{-360}}{0{,}003994\ldots} = 195.323{,}20$$

4.15 $CW = 200 \cdot 1{,}023 \cdot \dfrac{1 - 1{,}023^{-15}}{0{,}023} = 2570{,}90$

4.16 **a.** De maandinterest is $1{,}02^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}00165\ldots$ Dan volgt:
$$CW = 90{,}15 \cdot 1{,}00165\ldots \cdot \frac{1 - 1{,}00165\ldots^{-12}}{0{,}0016594\ldots} = 1072{,}04$$
b. Bedrag inclusief korting is $12 \cdot 90{,}15 \cdot 0{,}96 = 1038{,}53$, dus 33,51 voordeliger.
c. Schatting: 9,4% (trial and error). (Kan ook met ‘Oplosser’ in Excel.)

4.17 $EW = 1300 \cdot 1{,}03 \dfrac{1{,}03^{30} - 1}{0{,}03} = 63.703{,}48$

4.18 **a.** Er zijn **twaalf** stortingen (1 december 2010 tot en met 1 december 2021) van elk € 1000. De postnumerando eindwaarde, vlak na de twaalfde storting, is:
$$EW = 1000 \cdot \frac{1{,}035^{12} - 1}{0{,}035} = 14.601{,}96$$
b. De eindwaarde is die uit onderdeel a, met een vermindering van de overgeslagen, acht jaar opgerente storting van € 1000 uit 2013:
$EW = 14.601{,}96 - 1000 \cdot 1{,}035^{8} = 13.285{,}15$

4.19 De eindwaarde van de achttien stortingen (noem ze X) moet € 30.000 zijn, dus:
$$EW = X \cdot \frac{1{,}04^{18} - 1}{0{,}04} = 30.000 \rightarrow X \cdot 25{,}6454\ldots = 30.000 \rightarrow X = 1169{,}80$$

uitgeverij | coutinho

4.20 De maandinterest volgt uit $1{,}037^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}00303\ldots$ De prenumerando eindwaarde is:

$$EW = 50 \cdot 1{,}00303\ldots \frac{1{,}00303\ldots^{24} - 1}{0{,}00303\ldots} = 1246{,}56$$

4.21 De tijdlijn bij deze opgave is:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
4500 & & & & & & T & & T & & T & & T & & T & & T & & T & & T \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\hline
& 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 & & 10 &
\end{array}$$

De contante waarde van de acht termijnen T moet het bedrag 4500 zijn. Vat die acht termijnen op als een postnumerando rente; dan moeten we die waarde nog twee jaar terugrenten:

$$4500 = 1{,}03^{-2} \cdot T \cdot \frac{1 - 1{,}03^{-8}}{0{,}03} \longrightarrow 4500 = 6{,}616\ldots \cdot T \longrightarrow T = 680{,}09$$

4.22 Dit is de eindwaarde van een prenumerando rente van vijftien termijnen van € 600 jaarlijks, bij een interest van 3,5% per jaar, onder aftrek van een tien jaar opgerente 'derving' van € 400. Zie de tijdlijn:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
600 & & 600 & & 600 & & 600 & & 600 & & 600 & & 600 & & 600 & & 600 & & 600 & & EW \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\hline
& 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & \ldots & & 14 & & 15 &
\end{array}$$

$$EW = 600 \cdot 1{,}035 \cdot \frac{1{,}035^{15} - 1}{0{,}035} - 400 \cdot 1{,}035^{10} = 11.418{,}38$$

4.23 De contante waarde van de op te nemen prenumerando bedragen (T) moet gelijk zijn aan het te ontvangen bedrag:

$56.000 = T \cdot \ddot{a}_{12\neg 0{,}4}$, dus

$$56.000 = T \cdot 1{,}04 \cdot \frac{1 - 1{,}04^{-10}}{0{,}04} \longrightarrow T = 6638{,}74$$

4.24 Reken eerst de jaarinterest om naar kwartaalinterest: $1{,}06^{\frac{1}{4}} = 1{,}01467\ldots$ Dan is de contante waarde:

$$CW = 1400 \cdot \frac{1}{0{,}01467\ldots} = 95.407{,}84$$

4.25 **a.** Dit is een postnumerando oneindige rente. De contante waarde is:

$$CW = T \times \frac{1}{r} = 2000 \times \frac{1}{0{,}04} = 50.000$$

b. Dit is een prenumerando oneindige rente, met contante waarde:

$$CW = T \cdot \frac{1 + r}{r} = 2000 \times \frac{1{,}04}{0{,}04} = 52.000$$

4.26 **a.**

Jaar	Aflossing	Interest	Totaal	Restschuld
1	20000	13000	33000	180000
2	20000	11700	31700	160000
3	20000	10400	30400	140000

b. Het zesde interestdeel is de restschuld aan het eind van het vijfde jaar maal het interestpercentage, dus $100.000 \times 0{,}065 = 6500$.

c. De som van alle interestdelen is:
$13.000 + 11.700 + 10.400 + \ldots + 3900 + 2600 + 1300$
Dit is een rekenkundige rij (zie paragraaf 1.13.3). Tel deze tien termen als volgt op:
$1^e + 10^e$: $13.000 + 1300 = 14.300$
$2^e + 9^e$: $11.700 + 2600 = 14.300$
$3^e + 8^e$: $10.440 + 3900 = 14.300$
etc.
Totaal $5 \cdot 14.300 = 71.500$

4.27 **a.** $\text{Ann} = \dfrac{K}{a_{n\neg p}} = \dfrac{1.000.000}{a_{10\neg 5,9}} = 135.224{,}98.$

b. Restschuld na 5 jaar $= R_5 =$ CW toekomstige annuïteiten
$= 135.224{,}98 \cdots \ddot{a}_{5\neg 5,9} = 571.169{,}76$

c. Omdat bij een annuïteitenlening de aflossingen een meetkundige rij vormen, en (dus) relatief lager beginnen.

d. Nu wordt de annuïteit: $\text{Ann} = \dfrac{K}{\ddot{a}_{n\neg p}} = \dfrac{1.000.000}{\ddot{a}_{10\neg 5,9}} = 127.691.$

4.28 **a.** Reken bijvoorbeeld de jaarrente om naar maandrente: $(1{,}039)^{\frac{1}{12}} = 1{,}00319\ldots$; dit is $0{,}319\ldots\%$ per maand, dus **niet** de gegeven maandrente in de tabel (0,323%)!

b. De maandelijks te betalen € 109 bestaat uit aflossing en interest. Samen zijn ze constant, dus het betreft hier een annuïteitenlening.

c. $\text{CW} = T \cdot a_{n\neg p} = 109 \cdot \dfrac{1 - 1{,}00323^{-240}}{0{,}00323} = 18.183.$

Conclusie: de lener krijgt meer dan waar hij financieel-rekenkundig recht op heeft.

4.29 **a.** Dit is een voorbeeld van een oneindige lening: de looptijd staat blijkbaar niet vast.

b. De rentevoet per maand is $64/20.000 = 0{,}0032$, dus rentefactor per jaar is $1{,}0032^{12} = 1{,}03908$, dus rente is (ongeveer) 3,9% per jaar. Klopt dus.

4.30 **a.** CW interestdelen is $= 56.000 \cdot \dfrac{1 - 1{,}07^{-10}}{0{,}07} = 393.320{,}57$

b. CW aflossing is $800.000 \cdot 1{,}07^{-10} = 406.679{,}43$

c. De optelling van de antwoorden van a en b geeft het bedrag van de lening: € 800.000.

uitgeverij | coutinho

4.31 Noteer de elfde aflossing als a_{11}, het elfde interestdeel als r_{11} en de restschuld als R_{11}. In de tabel staan de antwoorden.

Type	a_{11}	r_{11}	R_{11}
Lineaire lening	12.500	5875	112.500
Ineens aflosbare lening	0	11.750	250.000
Annuïteitenlening	12.353	7201	140.859

Toelichting:

- Lineair:

Aflossing is telkens $250.000/20 = 12.500$, $R_{11} = 250.000 - 11 \cdot 12.500 = 112.500$
$R_{10} = 125.000$, dus $r_{11} = 125.000 \cdot 0{,}047 = 5875$

- Ineens aflosbaar:

Aflossingen t/m 19 zijn 0; rente is steeds maximaal, dus ook
$r_{11} = 250.000 \cdot 0{,}047 = 11.750$
R_{11} is nog steeds 250.000.

- Annuïtair:

$\text{Ann} = 250.000 \cdot 0{,}047/(1 - 1{,}047^{-20}) = 19.553{,}54$
$r_1 = 11.750$, dus $a_1 = 19.553{,}54 - 11.750 = 7803{,}54$
Dus $a_{11} = a_1 \cdot 1{,}047^{10} = 12.353$ (bij annuïteiten vormen de aflossingen een meetkundige rij); $r_{11} = \text{Ann} - a_{11} = 7201$
$R_{11} =$ CW van de negen nog te betalen annuïteiten $= 19.553{,}54 \times (1 - 1{,}047^{-9})/0{,}047$ $= 140.859$.

4.32 De totale nominale interestlast is het kleinst bij de afschrijvingsmethode met een vast percentage van de boekwaarde. De bedoelde bedragen zijn bij de vier gebruikte methoden in de voorbeelden € 19.200 (lineair), € 19.828 (annuïtair), € 14.633 (vast percentage van de boekwaarde) en € 15.600 (Sum Of Years' Digits).

4.33

Jaar	Boekwaarde begin v. h. jaar	Aflossing	Interest	Totaal	Boekwaarde eind v. h. jaar
1	650.000	90.000	32.500	122.500	560.000
2	560.000	90.000	28.000	118.000	470.000
3	470.000	90.000	23.500	113.500	380.000
4	380.000	90.000	19.000	109.000	290.000
5	290.000	90.000	14.500	104.500	200.000
6	200.000	90.000	10.000	100.000	110.000
7	110.000	90.000	5500	95.500	20.000

uitgeverij coutinho | C

4.34

Jaar	Boekwaarde begin v. h. jaar	Aflossing	Interest	Totaal (annuïteit)	Boekwaarde eind v. h. jaar
1	120.000	14.702	6000	20.702	105.298
2	105.298	15.437	5265	20.702	89.861
3	89.861	16.209	4493	20.702	73.653
4	73.653	17.019	3683	20.702	56.634
5	56.634	17.870	2832	20.702	38.764
6	38.764	18.764	1938	20.702	20.000

4.35 De factoren zijn: 5/15, 4/15, . . ., 1/15, met $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

Jaar	Boekwaarde begin v. h. jaar	Aflossing	Interest	Totaal	Boekwaarde eind v. h. jaar	SOYD-factor
1	160.000	52.000	11.200	63.200	108.000	0,333333
2	108.000	41.600	7560	49.160	66.400	0,266667
3	66.400	31.200	4648	35.848	35.200	0,2
4	35.200	20.800	2464	23.264	14.400	0,133333
5	14.400	10.400	1008	11.408	4000	0,066667

4.36 Het vaste afschrijvingspercentage is: $1 - \sqrt[n]{\frac{R}{K}} = 1 - \sqrt[6]{\frac{2.000}{90.000}} = 0{,}46977$

Jaar	Boekwaarde begin v. h. jaar	Aflossing	Interest	Totaal	Boekwaarde eind v. h. jaar
1	90.000	42.279	5400	47.679	47.721
2	47.721	22.418	2863	25.281	25.303
3	25.303	11.887	1518	13.405	13.416
4	13.416	6303	805	7108	7114
5	7114	3342	427	3769	3772
6	3772	1772	226	1998	2000

4.37 **a.** Annuïteit is € 149.029,49; eerste aflossing is € 69.029,49.

b. Ja, BET(0,08;10;−1000000).

c. 595.031($=$ Ann $\cdot\, a_{5\neg 8}$)

d. RENTE(120;-12.419,12;1000000;0;1) $=$ 0,7255% per maand, ofwel 9,06% per jaar.

uitgeverij coutinho

4.38 **a.** Zet in A1 t/m A8 de investering (−10 miljoen) en de zeven kasstromen. Typ dan in Excel =NHW(0,065;A2:A8)+A1. Antwoord: € 477.253,46.

b. =IR(A1:A8) = 0,0761, dus 7,61%

c. De vergelijking in onderdeel b is een zevendegraadsvergelijking: zie paragraaf 4.13.1, IR.

d. Ja, want het leningspercentage (6,5%) is kleiner dan IR (7,61%).

4.39 **a.** $1{,}00581^{12} = 1{,}07199$ dus 7,2% per jaar

b. Interestbetaling ('rente') en aflossing (hier: € 319,55 interestbetaling en € 230,45 aflossing).

c. $55.000 = 550 \cdot a_{n\neg 0{,}581} = 550 \cdot \dfrac{1 - 1{,}00581^{-n}}{0{,}00581}$

d. Vul in de vergelijking uit c 150 in: CW is dan € 54.964,04, iets minder dan € 55.000. Vul 151 in: antwoord is € 55.193,36, iets meer dan € 55.000.
(Of: vergelijking in onderdeel c wordt uiteindelijk: $1{,}00581^{-n} = 0{,}419$ dus $n = -\log 0{,}419 / \log 1{,}00581 = 150{,}16$.)

e. NPER(0,00581;−550;55000) = 150,16

4.40 **a.**

399	30	30	30	30	30	30	30	30
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	1	2	3	4	…	14	15	16

b. Annuïteitenlening, want rente en aflossing zijn blijkbaar constant.

c. $399 = 30 \cdot a_{16\neg p}$, dus $399 = 30 \cdot \dfrac{1-(1+r)^{-16}}{r}$

d. RATE(16;30;−399) = 0,0226; $1{,}0226^{12} = 1{,}3076$ dus 30,8% per jaar (!).

e. Kredietvergoeding is $16 \times 30 - 399 = 81$ euro.

Gemengde opgaven

4.41 **a.** (I) oorspronkelijke schuld $= 18 \cdot 125.000 =$ € 2.250.000
(II) oorspronkelijke schuld $= 193.000 \cdot [1 - 1{,}071^{-15}]/0{,}071 =$ € 1.746.778

b. (I) schuldrest per 6 september a.s.: $2.250.000 - 7 \cdot 125.000 = 1.375.000$; betaling dus $0{,}053 \cdot 1.375.000 + 125.000 = 197.875$
(II) betaling per 6 september is 193.000 (!)
Totaal aan betalingen per 6 september a.s. zal dus zijn: € 390.875

c. Schuldrest, incl. dan te betalen annuïteit, excl. extra betaling, per 6 september zal zijn:
$193.000 \cdot [1 - 1{,}071^{-7}]/0{,}071 = 1.036.516$
Verminder dit bedrag met de genoemde 193.000, dit geeft de nieuwe schuld: 843.516.
Stel nieuwe annuïteit = T; nu moet gelden $T \cdot [1 - 1{,}071^{-7}]/0{,}071 = 843.516$.
$T = 843.516 \cdot 0{,}071/(1 - 1{,}071^{-7}) = 321.641 =$ € 157.063

4.42 **a.** $CW = 25/1{,}08 + 30/1{,}08^2 + \ldots + 25/1{,}08^6 = 138{,}55$ miljoen euro

b. $\dfrac{25}{1+R} + \dfrac{30}{(1+R)^2} + \dfrac{35}{(1+R)^3} + \dfrac{35}{(1+R)^4} + \dfrac{30}{(1+R)^5} + \dfrac{25}{(1+R)^6} = 120$

uitgeverij coutinho c

4.43 **a.** Annuïteit = BET(6%;10;−50) = 6,793 miljard euro
b. 60% van de schuldrest na vier jaar is 0,6 · HW(6%;6;−6,793) = 0,6 · 33,40 = 20,04 miljard euro

4.44 **a.** $K = 3607{,}71 \cdot 1{,}045 \cdot (1{,}045^{30} - 1)/0{,}045 = 230.000$
b. Er is dan veertien keer premie betaald. De prenumerando eindwaarde is: $3607{,}71 \cdot 1{,}045 \cdot (1{,}045^{14} - 1)/0{,}045 = 71.375$

4.45

	A	B	C	D	E
1	Afschrijvingen				
2					
3	Type		Lineair		
4	Aanschafwaarde		300000		
5	Looptijd		15		
6	Interest		6%		
7	Restwaarde		20000		
8					
9	Jaar	Afschrijving	Interest	Totaal	Boekwaarde
10	1	18666,67	18000	36666,67	281333,33
11	2	18666,67	16880	35546,67	262666,67
12	3	18666,67	15760	34426,67	244000,00
13	4	18666,67	14640	33306,67	225333,33
14	5	18666,67	13520	32186,67	206666,67
15	6	18666,67	12400	31066,67	188000,00
16	7	18666,67	11280	29946,67	169333,33
17	8	18666,67	10160	28826,67	150666,67
18	9	18666,67	9040	27706,67	132000,00
19	10	18666,67	7920	26586,67	113333,33
20	11	18666,67	6800	25466,67	94666,67
21	12	18666,67	5680	24346,67	76000,00
22	13	18666,67	4560	23226,67	57333,33
23	14	18666,67	3440	22106,67	38666,67
24	15	18666,67	2320	20986,67	20000,00

Er geldt: $A(t) = 18.666{,}67$, $I(t) = 19120 - 1120t$, $T(t) = 37.786{,}67 - 1120t$, $BW(t) = 300.000 - 18.666{,}67t$, voor $t = 1, \ldots, 15$. $BW(7{,}25) = 300.000 - 18.666{,}67 \times 7{,}25 = €\ 164.666{,}64$.

uitgeverij | coutinho

4.46 Ja, dit is een lineair afschrijvingsschema.

	A	B	C	D	E
1	Afschrijvingen				
2					
3	Type		Lineair		
4	Aanschafwaarde		750000		
5	Looptijd		8		
6	Interest		6,3%		
7	Restwaarde		30000		
8					
9	Jaar	Afschrijving	Interest	Totaal	Boekwaarde
10	1	90000	47250	137250	660000
11	2	90000	41580	131580	570000
12	3	90000	35910	125910	480000
13	4	90000	30240	120240	390000
14	5	90000	24570	114570	300000
15	6	90000	18900	108900	210000
16	7	90000	13230	103230	120000
17	8	90000	7560	97560	30000

4.47 **a.** Benodigd bedrag $= 18.000 \cdot (1 + 1/1{,}06 + 1/1{,}06^2 + 1/1{,}06^3 + 1/1{,}06^4)$
$= 18.000 \cdot 1{,}06 \cdot (1 - 1{,}06 - 5)/0{,}06 = 80.372$ dus € 80.400.

b. Stel het jaarlijks in te leggen bedrag T; er moet dan gelden:
$T \cdot 1{,}07 \cdot (1{,}07^{30} - 1)/0{,}07 = 80.400$ geeft $T = 795{,}46$. De jaarlijkse termijnen zullen dus circa € 795 bedragen.

4.48 **a.** De schuldrest $= 78.625 \cdot (1 - 1{,}079^{-8})/0{,}079 = 453.549$ euro.

b. De voorlaatste schuldrest bedraagt $78.625/1{,}079 = 72.868{,}40$; het interestbestanddeel van de laatste annuïteit bedraagt $72.868{,}40 \cdot 0{,}079 = 5756{,}6$; het aflossingsbestanddeel van de laatste annuïteit bedraagt dan $78.625 - 5756{,}6$ ofwel circa 72.868 euro.

c. De vergelijking voor de nieuwe annuïteit zal zijn:
$\text{Ann} \cdot (1 - 1{,}063^{-8})/0{,}063 = 453.549$, dus Ann $= 73.907$; het verschil met de oude annuïteit bedraagt nominaal $78.625 - 73.907$ ofwel 4718 euro per jaar; als we deze bedragen contant maken tegen 6,3% (het geldende rentepercentage) levert dit: 28.953 euro. De investering (boete) van 15.000 euro is dus de moeite waard, omzetten levert een contant voordeel op van € 13.953.

uitgeverij coutinho

4.49 **a.** 4,9% per jaar betekent groeifactor 1,049 per jaar en groeifactor $1{,}049^{\frac{1}{12}}$ per maand ofwel 0,4% per maand; eindsaldo is dan (met de aanname prenumerando) $50 \cdot 1{,}004 \cdot (1{,}004^{120} - 1)/0{,}004 = 7712$ euro; aardig in overeenstemming met de advertentiegegevens. NB Met postnumerando volgt: € 7682.

b. = NPER(0,049;-600;0;10000;1) = 12,04. Of: $600 \times 1{,}049 \times (1{,}049^n - 1)/0{,}049 = 10.000$ geeft $n = 12{,}04$; er zijn dus ten minste dertien jaarlijkse termijnen van € 600 nodig.

4.50 **a.** $CW = 85.000 \cdot (1 - 1{,}052^{-8})/0{,}052 = 544.959$ euro

b. Het rentebestanddeel van de eerstvolgende annuïteit bedraagt 5,2% van 544.959 ofwel 28.338 euro; het aflossingsbestanddeel bedraagt dus 85.000 − 28.338 ofwel 56.662 euro.

c. Aflossingsschema:

Jaar	Interest	Aflossing	Interest + aflossing	Schuldrest
1	12.000	48.000	60.000	192.000
2	9600	48.000	57.600	144.000
3	7200	48.000	55.200	96.000
4	4800	48.000	52.800	48.000
5	2400	48.000	50.400	0

d. Uitstaande schuld = 8250/0,055 = 150.000 euro.

4.51 Eindkapitaal bij 4%: $25 \cdot \dfrac{(1{,}04^{\frac{1}{12}})^{240} - 1}{1{,}04^{\frac{1}{12}} - 1} = 9096{,}04$ euro.

Eindkapitaal bij 0%: $20 \cdot 12 \cdot 25 = 6000$ euro.

Eindkapitaal bij −4%: $25 \cdot \dfrac{(0{,}96^{\frac{1}{12}})^{240} - 1}{0{,}96^{\frac{1}{12}} - 1} = 4107{,}69$ euro.

4.52 **a.** Annuïteitenlening, want aflossing en interest zijn samen een vast bedrag per maand.

b. Interest per maand is $1{,}066^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}00534$.
Dan is $r_1 = 0{,}00534 \cdot 10.000 = 53{,}40$ en dus $a_1 = 134 - 53{,}40 = 80{,}60$.
Dus is $r_2 = 0{,}00534 \cdot (10.000 - 80{,}60) = 52{,}97$. Dus $a_2 = 134 - 52{,}90 = 81{,}03$.
Evenzo is $r_3 = 0{,}00534 \cdot (10.000 - 80{,}60 - 81{,}03) = 52{,}54$, dus $a_3 = 81{,}46$.

c. RENTE(96;134;−10.000) = 0,00544 (scheelt dus iets met de berekende 0,00534)
NPER(1,0066^(1/12)−1;134;−10.000) = 95,45 ≈ 96 maanden
BET(1,0066^(1/12)−1;96;−10.000) = 133,4

d. Kredietvergoeding $96 \cdot 134 - 10.000 = 2864$ (tabel zegt 2830).

4.53 **a.** Aflossing en rente (interestvergoeding).

b. $500 = 23{,}95 \cdot (1 - (1 + r)^{-24})/r$

c. RENTE(24;23,95;-500) = 0,011467 per maand, dus $1{,}011467^{12} - 1 = 0{,}1466$ ofwel 14,66% per jaar.

d. IR(−500;23,95,...;23,95)

uitgeverij | coutinho

4.54 **a.** NHW(7,1%;12.000;15.000;18.000;21.000;26.000)−70.000 = 3346 > 0 dus rendabel
b. IR(I; Ks1;...:Ks5) = 8,66% > 7,1% dus rendabel
c. −15.105 (dus niet rendabel)
d. 0, want er wordt contant gemaakt tegen het rentepercentage dat investering en kasstromen in balans houdt.
e. Bijvoorbeeld bij een investering van 51.409,39 en gelijkblijvende kasstromen.

4.55 **a.**

−6367	95	95	95	95	95	95	95	3250 95	
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	[1,99%]
	1	2	3	4	...	34	35	36	

b. Annuïtaire lening.
c. BET(1,0199^(1/12)−1;95,−6367;3250) = 94,58 < 95
d. Consumentenbedrag is 36 · 95 + 3250 = 6670 (tabel: 6656)
e. NPER(1,0199^(1/12)−1;95;−6367;3250) = 35,8

4.56 Hieronder staan de afschrijvingsschema's voor de eerste drie jaren. De antwoorden zijn vetgedrukt.

(i)

Jaar	Boekwaarde begin v. h. jaar	Aflossing	Interest	Totaal	Boekwaarde eind v. h. jaar
1	245.000	24.000	19.600	43.600	221.000
2	221.000	24.000	17.680	41.680	197.000
3	197.000	24.000	15.760	39.760	**173.000**

(ii)

Jaar	Boekwaarde begin v. h. jaar	Aflossing	Interest	Totaal (annuïteit)	Boekwaarde eind v. h. jaar
1	245.000	16.567	19.600	36.167	228.433
2	228.433	17.892	18.275	36.167	210.540
3	210.540	19.324	16.843	36.167	**191.217**

(iii)

Jaar	Boekwaarde begin v. h. jaar	Aflossing	Interest	Totaal	Boekwaarde eind v. h. jaar	SOYD-factor
1	245.000	43.636	19.600	63.236	201.364	10/55
2	201.364	39.273	16.109	55.382	162.091	9/55
3	162.091	34.909	12.967	47.876	**127.182**	8/55

uitgeverij | c
coutinho

(iv)

Jaar	Boekwaarde begin v. h. jaar	Aflossing	Interest	Totaal	Boekwaarde eind v. h. jaar
1	245.000	78.985	19.600	98.585	166.015
2	166.015	53.521	13.281	66.802	112.493
3	112.493	36.267	8999	45.266	**76.227**

Factor: $1 - (5/245)^{\frac{1}{10}} = 0{,}322389$

4.57 Bij de afschrijving van de Sum Of the Years' Digits zijn alleen de afschrijvingen lineair: $A(t) = 60.000 - 10.000t$, voor $t = 1$ t/m 5. Het volledige afschrijvingsschema is:

Jaar	Interest	Afschrijving	Totaal	Boekwaarde
1	12.000	50.000	72.000	130.000
2	8400	40.000	56.400	90.000
3	5520	30.000	41.520	60.000
4	3360	20.000	27.360	30.000
5	1920	10.000	13.920	20.000

4.58 **a.** $\text{NCW} = -15 + 5/1{,}07 + 6/1{,}07^2 + 7/1{,}07^3 = 0{,}63$ (miljoen euro)

b. $30 \cdot (1 - 1{,}021^{-5})/0{,}021 = 140{,}99$ (miljoen euro)

c. $\text{Waarde} = Ks_{vrij}/i = 30/0{,}021 = 1428{,}57$ (miljoen euro)

Praktijkcases

4.59 **a.** $4{,}1/3 = 1{,}366$, dus 36,6%

b. $1{,}366^{\frac{1}{2{,}5}} = 1{,}133$, dus 13,3%

c. Omdat het niet één terugbetaling betreft, maar meerdere.

d. Zet de gegeven formule in Excel met r als variabele cel en gebruik de Oplosser: $r = 15\%$.

4.60 **a.** $$\text{CW} = 110{,}56 \cdot \frac{1 - 1{,}05^{-3}}{1{,}05^{\frac{1}{12}} - 1} = €\,3695$$

Er wordt hier gerekend met de juiste maandtermijn € 3980/36 = € 110,56; deze is in de tabel naar boven afgerond. Verder is:$1{,}05^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}00407\ldots$ de rentevoet per maand (in een perunage). De gegeven korting is dus

$$K = 1 - \frac{\text{CW}}{\text{krediet}} = 1 - \frac{3695}{3980} = 0{,}072 \text{ ofwel } 7{,}2\%.$$

b. De gegeven korting is dan $K = 1 - \dfrac{3543}{3980} = 0{,}11$

uitgeverij | c
coutinho

5 Rentabiliteitswaarde

5.1 **a.** Tijdlijn:

$$\begin{array}{cccccccccc} Rw & 70 & 70 & 70 & 70 & 70 & 70 & 1070 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & [4\%] \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \end{array}$$

$$Rw = 1000 \cdot 1{,}04^{-7} + 70 \cdot \frac{1 - 1{,}04^{-7}}{0{,}04} \cdot = 1180{,}06 \text{ euro.}$$

b. $1063 = \frac{70}{1+r} + \frac{70}{(1+r)^2} + \frac{70}{(1+r)^3} + \frac{70}{(1+r)^4} + \frac{70}{(1+r)^5} + \frac{70}{(1+r)^6} + \frac{1070}{(1+r)^7}$

ofwel $1063 = 70 \cdot \frac{1-(1+r)^{-7}}{r} \cdot +100 \cdot (1+r)^{-7}$.

5.2 **a.** $Rw = 17.600 \cdot \frac{1 - 1{,}05^{-6}}{0{,}05} = 89.332{,}18$ euro

b. schuld $= 130.000 - 4 \times 13.000 = 78.000$ euro

$$Ca = 13.000 \cdot \frac{1 - 1{,}05^{-6}}{0{,}05} = 65.984 \text{ euro}$$

$$Ci = \frac{p}{p'} \cdot (K - Ca) = \frac{4}{5} \cdot (13.000 - 65.984{,}00) = 9612{,}80$$

$$Rw = Ca + Ci = 65.984{,}00 + 9612{,}80 = 75.596{,}80 \text{ euro}$$

5.3 **a.** $Rw_{t=8} = 87.500 \times 1{,}04^{-8} = 63.935$ euro

b. $Rw_{t=7\frac{1}{4}} = 87.500 \times 1{,}04^{-7\frac{1}{4}} = 65.844$ euro

5.4 **a.** $Rw = 50 \times \frac{1 - 1{,}04^{-8}}{0{,}04} + 1000 \times 1{,}04^{-8} \approx 1067{,}33$ euro

b. $Rw = 50 \times \frac{1 - 1{,}06^{-6}}{0{,}06} + 1000 \times 1{,}06^{-6} \approx 950{,}83$ euro $\longrightarrow$ koers $= \frac{950{,}83}{1000}$

$\times 100\% \approx 95{,}1\%$

c. disagio $= 1000 - 950{,}83 = 49{,}17$ euro

5.5 $Ca = 0$, dus er wordt niet afgelost, dus is er sprake van een niet-aflosbare lening.

5.6 **a.** Eerst de annuïteit berekenen:

$341.666 = Ann \cdot \frac{1 - 1{,}03^{-7}}{0{,}03}$ dus $Ann = 54.839{,}56$

$$Rw(t = 4) = 54.839{,}56 \cdot \frac{1 - 1{,}03^{-6}}{0{,}03} = 297.076$$

b Schuldrest $(t = 3)$

$$54.839{,}56 \cdot \frac{1 - 1{,}05^{-7}}{0{,}05} = 317.322{,}17$$

Dus koers op $t = 3$ is $\frac{341.666}{317.322} \times 100\% = 107{,}7\%$.

5.7 **a.** (i) $\mathrm{Rw} = 0{,}028 \times 240 \times \frac{1 - 1{,}018^{-6}}{0{,}018}$

$+ 240 \times 1{,}018^{-6} = 254$ miljoen

(ii) Uitstaande schuld per 1/8 a.s.: $60\% \times 24 = 144$ miljoen

$\mathrm{Ca} = 24 \text{ miljoen} \times \frac{1 - 1{,}018^{-6}}{0{,}018} = 135{,}346$ miljoen

$\mathrm{Ci} = \frac{p}{p'} \times (144 - 135{,}346) = 13{,}461$ miljoen

$\mathrm{Rw} = 135{,}346 + 13{,}461 \approx 149$ miljoen

b. (i) Koers bulletlening $= \frac{254}{240} \times 100\% \approx 105{,}8\%$

(ii) Koers lineaire lening $= \frac{149}{144} \times 100\% \approx 103{,}5\%$

c. De bulletlening is het gevoeligst voor renteveranderingen, omdat de interestdelen een groter aandeel in de betalingen vormen dan bij een lineaire lening. De koers (bulletlening) wijkt verder af van 100% dan de koers van de lineaire lening, ofwel (dis)agio is groter.

5.8 **a.** $\mathrm{Rw}_{t=3;4,5\%} = 13.200 \cdot \frac{1 - 1{,}045^{-7}}{0{,}045} + 240.000 \cdot 1{,}045^{-7} = 254.142$ euro

$\mathrm{Koers}_{t=3;4,5\%} = \frac{254.142}{240.000} \cdot 100\% \approx 105{,}9\%$

b. $\mathrm{Ann} \cdot \frac{1 - 1{,}055^{-10}}{0{,}055} = 240.000$ dus $\mathrm{Ann} = 240.000 \cdot \frac{0{,}055}{1 - 1{,}055^{-7}} = 31.840{,}26$ euro

Uitstaande schuld op $t = 3 : 31.840{,}26 \cdot \frac{1 - 1{,}055^{-7}}{0{,}055} = 180.947$ euro

$\mathrm{Rw}_{t=3;4,5\%} = 31.840{,}26 \cdot \frac{1 - 1{,}045^{-7}}{0{,}045 = 187.625 \text{ euro}}$

$\mathrm{Koers}_{t=3;4,5\%} = \frac{187.625}{180.947} \cdot 100\% \approx 103{,}7\%$

c. Uitstaande schuld op $t = 3 : 168.000$ euro

$\mathrm{Ca}_{t=3;4,5\%} = 24.000 \cdot \frac{1 - 1{,}045^{-7}}{0{,}045 = 141.424{,}82}$

$\mathrm{Ci}_{t=3;4,5\%} = \frac{5{,}5}{4{,}5} \cdot (168.000 - 141.424{,}82) = 32.480{,}78$

$\mathrm{Rw}_{t=3;4,5\%} = 141.424{,}82 + 32.480{,}78 = 173.905{,}60$

$\mathrm{Koers}_{t=3;4,5\%} = \frac{173.905{,}60}{168.000 \cdot 100\% \approx 103{,}5\%}$

uitgeverij coutinho

d. $Ca = 0$, dus $Ci = \dfrac{5{,}5}{4{,}5} \cdot 240.000 = 293.333{,}33$

$Rw_{t=3;4,5\%} = 293.333{,}33$

$Koers_{t=3;4,5\%} = \dfrac{293.333{,}33}{240.000} \cdot 100\% = 122{,}2\%$

5.9 $Rw_{t=8;2,9\%} = 1{,}029 \times 51.013{,}65 - 18.000 = 34.493{,}05$ euro
$Rw_{t=7¦;2,9\%} = \frac{1}{4} \times 51.013{,}65 + \frac{3}{4} \times 34.493{,}05 = 38.623{,}20$ euro

5.10 **a.** schuld eind jaar 9: $740.000 - 4 \times 37.000 = 592.000$, dus:
rente eind jaar 10 is gelijk $5\% \times 592.000 = 29.600$ euro

b. totaal rentebedrag $= 5 \times 37.000 + 20 \times \frac{1}{2} \times (37.000 + 1850) = 573.500$ euro

c. $Ca = 37.000 \cdot \dfrac{1 - 1{,}02^{-9}}{0{,}02 = 302.002{,}76}$

dus $Ci = \frac{5}{2} \cdot (333.000 - 302.002{,}76) = 77.493{,}1$ dus

$Rw = 302.002{,}76 + 77.493{,}1 = 379.496$ euro, dus koers $= \dfrac{379.496}{333.000 \cdot 100\% = 115{,}0\%}$

5.11 Prijs $= CW = 22 \times \dfrac{1 - 1{,}025^{-6}}{0{,}025} + 510 \times 1{,}025^{-6} \approx 560{,}95$

5.12 **a.** $Rw_{t=8;5\%} = \dfrac{1040}{1{,}05^2} + \dfrac{40}{1{,}05} = 981{,}41$ euro

b. $Rw_{t=8;5\%} = \dfrac{1040 + x}{1{,}05^2} + \dfrac{40}{1{,}05} = 1006{,}80$

Vermenigvuldigen met $1{,}05^2$ geeft: $1040 + x + 42 = 1110$, dus $x = 28$.
De aflossingspremie bedraagt dus 2,8%.

Gemengde opgaven

5.13 $Rw_{t=3;3,5\%} = 40 \cdot \dfrac{1 - 1{,}035^{-5}}{0{,}035} + \dfrac{540}{1{,}035^6} + \dfrac{520}{1{,}035^7} = 1028{,}61$ euro

5.14 **a.** $Rw = 35 \times \dfrac{1 - 1{,}019^{-3}}{0{,}019} + 1000 \times 1{,}019^{-3} = 1046{,}23$ dus koers $= 104{,}6\%$

b. $Rw = \dfrac{35}{1{,}019} + \dfrac{1065}{1{,}019^2} = 1060$ euro

5.15 We hebben hier van doen met een vijf jaar uitgestelde lineaire lening; er geldt:

$Ca = 40.000 \cdot \dfrac{1 - 1{,}065^{-7}}{0{,}065} \cdot 1{,}065^{-3} \approx 181.614{,}19$ euro

$267.891 = 181.614{,}19 + \dfrac{p}{6{,}5} \cdot (280.000 - 181.614{,}19) \rightarrow p = 5{,}7\%$

uitgeverij | coutinho c

5.16 **a.** $Rw = 25 \times \dfrac{1 - 1{,}044^{-7}}{0{,}044} + 500 \times 1{,}044^{-7} \approx 517{,}74$

b. bij 4,0%: $Rw = 25 \times \dfrac{1 - 1{,}04^{-7}}{0{,}04} + 500 \times 1{,}04^{-7} \approx 530{,}01$

bij 3,9%: $Rw = 25 \times \dfrac{1 - 1{,}039^{-7}}{0{,}039} + 500 \times 1{,}039^{-7} \approx 533{,}13$

bij 3,8%: $Rw = 25 \times \dfrac{1 - 1{,}038^{-7}}{0{,}038} + 500 \times 1{,}038^{-7} \approx 536{,}28$

Het effectief rendement bij de gegeven 534,50 ligt dus tussen 3,8% en 3,9%.

c. De kans op aflossen na zes jaar respectievelijk zeven jaar bedraagt 0,5; de marktrente bedraagt 4,4%; dus:

$Rw = 0{,}5 \times 25 \times \dfrac{1 - 1{,}044^{-7}}{0{,}044} + 250 \times 1{,}044^{-7} + 0{,}5 \times 25 \times \dfrac{1 - 1{,}044^{-6}}{0{,}044}$

$+250 \times 1{,}044^{-6}$

$Rw = 0{,}5 \cdot (517{,}74 + 515{,}52) = 516{,}63$ euro

5.17 **a.** schuldrest $= 14.000 \times \dfrac{1 - 1{,}045^{-13}}{0{,}045} \approx 135.560$ euro

b. $Rw = 14.000 \times \dfrac{1 - 1{,}055^{-13}}{0{,}055} \approx 127.639$ euro

5.18 **a.** Uitgestelde lineaire lening.

b. We rekenen met een eenheid van 100: er wordt dan vanaf jaar 5 vanaf nu jaarlijks 25 euro afgelost bij een rente van 6%; de gevraagde koers is nu de CW van de toekomstige betalingen op basis van 3,5%: CW is dus in dit geval gelijk aan de koers.

$CW = 6 \times a_{4\neg 3{,}5} + (25 + 6)/1{,}035^2 + (25 + 4{,}5)/1{,}035^6 + (25 + 3)/1{,}035^7$
$+(25 + 1{,}5)/1{,}035^8 = 114{,}27\%$

Deze berekening kan ook worden uitgevoerd met behulp van de formule
$Rw = Ca + p/p' \times (K - Ca)$.

c. $\dfrac{477{,}65}{453{,}78} \times 100\% = 6 \times \dfrac{1 - (1 + R)^{-4}}{R} + 31 \times (1 + R)^{-5} + 29{,}5 \times (1 + R)^{-6}$
$+ 28 \times (1 + R)^{-7} + 26{,}5 \times (1 + R)^{-8}$
met: R = effectieve rendement in de vorm van een groeivoet

5.19 **a.** $Rw = 500 \cdot 1{,}04^{-7} + 25 \cdot (1 - 1{,}04^{-7})/0{,}04 = 530{,}01$ euro

b. $523 = 500 \cdot (1 + r)^{-7} + 25 \cdot (1 - (1 + r)^{-7})/r$

5. 20 **a.** $Rw = 1000 \cdot 1{,}04^{-5} + 60 \cdot (1 - 1{,}04^{-5})/0{,}04 = 1089{,}04$ euro

b. $1047 = 1000 \cdot (1 + r)^{-5} + 60 \cdot (1 - (1 + r)^{-5})/r$

5.21 $Rw = Ca + Ci = 20.610 \cdot (1 - 1{,}051^{-6})/0{,}051 + 10.305 \cdot 1{,}051^{-7} + 229.000 \cdot 1{,}051^{-6}$
$+ 229.000 \cdot 1{,}051^{-7} = 443.126{,}50$ euro

uitgeverij | coutinho C

Praktijkcase

5.22 Als voorbeeldmodel nemen we de genoemde staatsobligatie op 12 februari 2014.

a. De (slot)koers is 116,08 en de effectieve interest is 1,76%. De coupondatum is elke 15^e^ januari. Op 15/2/2023 wordt de obligatie afgelost (Financieele Dagblad 12/2/2014).

De koers is boven de 100%, omdat in februari 2014 de marktrente ongeveer 2% was en de staatsobligatie nog ruim acht jaar 3,75% geeft.

b. De resterende looptijd is ongeveer acht jaar en elf maanden. Neem € 100 als bedrag; dan is de koers gelijk aan de rentabiliteitswaarde. De gevraagde koers is dan het gewogen gemiddelde van de Rw-waarden op $t = 8$ en $t = 9$:

$$\mathrm{Rw}_{n=9} = \mathrm{Ca} + \mathrm{Ci} = 100 \cdot 1{,}0176^{-9} + 3{,}75 \cdot \frac{1 - 1{,}0176^{-9}}{0{,}0176} = 116{,}43$$

$$\mathrm{Rw}_{n=8} = 100 \cdot 1{,}0176^{-8} + 3{,}75 \cdot \frac{1 - 1{,}0176^{-8}}{0{,}0176} = 114{,}73$$

$$\mathrm{Rw}_{n=8\frac{11}{12}} = \tfrac{11}{12} \cdot \mathrm{Rw}_{n=9} + \tfrac{1}{12} \cdot \mathrm{Rw}_{n=8} = 116{,}29$$

Dit is niet precies gelijk aan de gegeven koers 116,08.

uitgeverij coutinho c