Basisboek kwantitatieve methoden

Wiskunde en financiële rekenkunde
met Exceltoepassingen

UITWERKINGEN VAN DE OPGAVEN

Donald van As
Jaap Klouwen

uitgeverij
coutinho

bussum 2006

Deze uitwerkingen horen bij *Basisboek kwantitatieve methoden – Wiskunde en financiële rekenkunde* van Donald van As en Jaap Klouwen.

Speciale dank gaat uit naar Rob Maas.

Uitgeverij Coutinho
Postbus 333
1400 AH Bussum
info@coutinho.nl
www.coutinho.nl

ISBN 978 90 469 0026 0
NUR 780, 919

1 Lineaire verbanden

1.1 a. 117 – 38 dus 79
b. b – a
c. 7/18
d. q/p
e. -t
f. 1/r

1.2 bijv. 7/9 en 9/7 of 0,8 en 1,25

1.3 bijv. 3/5 en -3/5

1.4 -23 en 1/23

1.5 a. a + b + 2a – 2b, dus 3a – b
b. a + b – 2a + 2b, dus -a + 3b
c. kan niet verder vereenvoudigd worden
d. -3r + 8 – 4r + 4r – 2rt + tr = -3r + 8 – rt

1.6 a. 8f + 8g + 8 + f + g = 9f + 9g + 8
(opm.: in de opgave waren de haken om de tweede vorm f + g overbodig)
b. 15t – 15 – 5t, dus 10t – 15
c. yw – yx –wy + wx = -yx + wx
d. -2cr + 2cd –rc + rd = -3cr + 2cd + rd

1.7 a. kr + tr + k + t + r – 2kr – t = -kr + tr + k + r
b. 4p – 8q – 3p – 12q – p + pq = -20q + pq
c. xy – xz – 2yz + 2yx + 3xz = 3xy + 2xz – 2yz
d. RS + 2S + R + SR = 2RS + 2S + R

1.8 a. $\frac{9}{12}+\frac{4}{12}$ dus $\frac{13}{12}$
b. $\frac{3p}{12}+\frac{4}{12}$ dus $\frac{3p+4}{12}$
c. $\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}$ dus $\frac{b+a}{ab}$
d. $\frac{2a}{2b}-\frac{7}{2b}$ dus $\frac{2a-7}{2b}$
e. $\frac{5(1+R)}{1+R}+\frac{5}{1+R}=\frac{5+5R}{1+R}+\frac{5}{1+R}=\frac{10+5R}{1+R}$
f. $\frac{4g}{g}-\frac{10}{g}$ dus $\frac{4g-10}{g}$

1.9 a. $\frac{1}{4}$
b. $\frac{p}{12}$
c. $\frac{1}{ab}$

d. $\frac{7a}{b \times 2b}$ hetgeen kan worden geschreven als $\frac{7a}{2b^2}$ (zie hoofdstuk 2)

e. $\frac{25}{1+R}$

f. $\frac{40}{g}$

1.10 a. $\frac{9}{6C} + \frac{2}{6C}$ dus $\frac{11}{6C}$

b. $\frac{48}{2y} - \frac{3}{2y}$ dus $\frac{45}{2y}$

c. $\frac{8}{16} \times \frac{p}{p} \times \frac{1}{q}$ dus $\frac{1}{2q}$

d. $\frac{10a+30}{5} + \frac{a}{5}$ dus $\frac{11a+30}{5}$

e. $\frac{5c}{c+2} \times 2$ dus $\frac{10c}{c+2}$

f. $\frac{a}{g \times \left(\frac{1}{g} - 1\right)}$ dus $\frac{a}{1-g}$

1.11 a. $\frac{3}{4} \times \frac{3}{1}$ (delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde, dus $\frac{9}{4}$)

b. $\frac{p}{4} \times 3$ dus $\frac{3p}{4}$

c. $\frac{1}{a} \times \frac{b}{1}$ dus $\frac{b}{a}$

d. $\frac{a}{b} \times \frac{2b}{7}$ dus $\frac{a}{7} \times \frac{2b}{b}$ dus $\frac{a}{7} \times 2$ dus $\frac{2a}{7}$

e. $5 \times \frac{1+R}{5} = 1 + R$

f. $4 \times \frac{g}{10}$ dus $\frac{2g}{5}$

1.12 a. $(2+R) \times 10 - 4 \times \frac{R}{12} = 20 + 10R - \frac{R}{3} = \frac{60+30R}{3} - \frac{R}{3} = \frac{60+29R}{3}$

b. haakjes uitwerken geeft: $\frac{l_{60}}{l_{40}} - \frac{l_{60}}{l_{40}} \times \frac{l_{65}}{l_{60}} = \frac{l_{60}}{l_{40}} - \frac{l_{65}}{l_{40}} = \frac{l_{60} - l_{65}}{l_{40}}$

1.13 0,4p + q = 6 geeft 0,4q = -p + 6, dus $q = \frac{-p+6}{0{,}4} = -2{,}5p + 15$

(delen door 0,4 is equivalent met vermenigvuldigen met 2,5, het omgekeerde van 0,4)

1.14 5v = -2u + 50 dus v = -0,4u + 10

1.15 NB: F en C moeten in het gegeven functievoorschrift omgewisseld worden:
De vraag moet dus luiden:

"Gegeven is F als functie van C: $F=\frac{9}{5}C+32$. Bepaal door middel van een berekening het voorschrift van C als functie van F."

De oplossing is:
$F=\frac{9}{5}C+32$, dus $F-32=\frac{9}{5}C$, dus $\frac{5}{9}(F-32)=C$
C als functie van F is dus $\frac{5}{9}(F-32)$, of, zonder haakjes: C = $\frac{5}{9}F-\frac{160}{9}$

1.16 richtingcoëfficiënt (helling) = $\frac{K(13)-K(9)}{13-9}=\frac{21-15}{4}=\frac{6}{4}=1{,}5$ dus K(t) = 1,5t + constante
nu coördinaten van één van de punten invullen: 15 = 1,5 · 9 + c ofwel c = 1,5 hetgeen leidt tot het antwoord: K = 1,5t + 1,5
controle: vul de coördinaten van het andere punt in: 21 = 1,5 · 13 + 1,5 geeft 21 = 19,5 + 1,5 (klopt!)

1.17 r.c. = $\frac{C(8)-C(4)}{8-4}=\frac{8-15}{4}=\frac{-7}{4}=-1{,}75$ dus C(Y) = -1,75Y + constante; nu coördinaten van één van de punten invullen: 15 = -1,75 · 4 + c ofwel c = 22 hetgeen leidt tot het antwoord:
C = -1,75t + 22
controle: vul de coördinaten van het andere punt in: 8 = -1,75 · 8 + 22 geeft 8 = -14 + 22 (klopt!)

1.18 er geldt: $\frac{\Delta I}{\Delta Y}$ = 0,6 ofwel r.c. = 0,6 dus I = 0,6 · Y + constante; invullen coördinaten (10;12) geeft:
12 = 0,6 · 10 + c dus c = 6. Het antwoord: I = 0,6Y + 6

1.19 a. 4y = -6x + 15 dus $y=\frac{-6}{4}x+15$ dus $\text{r.c.}=-\frac{6}{4}=-1{,}5$

b. 6x = -4y + 15 dus $y=\frac{-4}{6}x+2{,}5$ dus $\text{r.c.}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$

1.20 a. 3r = 9 dus r = 3
b. 2x – 10 = 25 dus 2x = 35 dus x = 17,5
c. 3 – 6 + 2y = 60 dus -3 + 2y = 60 dus 2y = 63 dus y = 31,5
d. 13x + 20 – 12x – 20 = 0 dus x = 0

1.21 a. 8 – 30 + 45n = 35n – 38 dus -22 + 10n = -38 dus 10n = -16 dus n = -1,6
b. 0,4t – 0,6 + 0,9t = t dus 1,3t - 0,6 = t dus 0,3t – 0,6 = 0 dus 0,3t = 0,6 dus t = 2
c. 4p – 33 + 12p = p = 29p + 58 dus 17p – 33 = 29p – 58 dus -12p = -25 dus $p=\frac{-25}{-12}=\frac{25}{12}$
d. $\frac{2}{3}R+\frac{5}{3}-\frac{2}{9}R=\frac{R-8}{12}$ dus $\frac{6}{9}R+\frac{5}{3}-\frac{2}{9}R=\frac{1}{12}R-\frac{8}{12}$ dus $\frac{4}{9}R+\frac{5}{3}=\frac{1}{12}R-\frac{2}{3}$
dus $\frac{16}{36}R-\frac{3}{36}R=-\frac{7}{3}$ dus $\frac{13}{36}R=-\frac{7}{3}$ dus $R=-\frac{7}{3}\times\frac{36}{13}=-7\times\frac{12}{13}=-\frac{84}{13}$

1.22 $0{,}5u + R - vR = wR$
de termen met R naar één kant: $0{,}5u = wR + vR - R$
R buiten haken halen: $0{,}5u = (w + v - 1)R$
delen door $w + v - 1$: $R = \dfrac{0{,}5u}{w+v-1}$

1.23 a. vermenigvuldiging met respectievelijk 2 en 1 geeft:

$$\begin{array}{rcl} 4x - 6y &=& 6 \\ -4x + 11y &=& 4 \\ \hline 5y &=& 10 \end{array} \; +$$

dus $y = 2$

vermenigvuldiging met respectievelijk 11 en 3 geeft:

$$\begin{array}{rcl} 22x - 33y &=& 33 \\ -12x + 33y &=& 12 \\ \hline 10x &=& 45 \end{array} \; +$$

dus $x = 4{,}5$

oplossing: $\begin{cases} x = 4{,}5 \\ y = 2 \end{cases}$

. b. we herschrijven de tweede vergelijking als volgt: $8x - 2y = x + 5$; dit leidt tot:

$\begin{cases} 8x - 7y = 1 \\ 7x - 2y = 5 \end{cases}$

vermenigvuldiging met respectievelijk 7 en -8 geeft:

$$\begin{array}{rcl} 56x - 49y &=& 7 \\ -56x + 16y &=& -40 \\ \hline -33y &=& -33 \end{array} \; +$$

dus $y = 1$

vermenigvuldiging met respectievelijk -2 en 7 geeft:

$$\begin{array}{rcl} -16x + 14y &=& -2 \\ 49x - 14y &=& 35 \\ \hline 33x &=& 33 \end{array} \; +$$

dus $x = 1$

oplossing: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

c. Er moet gelden: $0{,}6x + 30 = 0{,}4x + 45$; dit leidt tot $0{,}2x = 15$ dus tot $x = 75$.
Substitutie in de eerste vergelijking geeft $y = 0{,}4 \cdot 75 + 45 = 75$.

oplossing: $\begin{cases} x = 75 \\ y = 75 \end{cases}$

1.24 a. vermenigvuldiging met respectievelijk 3 en -6 geeft:

$$\begin{array}{rcl} 5u + 2v &=& 60 \\ -u - 2v &=& 12 \\ \hline 4u &=& 72 \end{array} \; +$$

dus $u = 18$

vermenigvuldiging met respectievelijk 3 en -30 geeft:

$$\begin{array}{rl} 5u + 2v = & 60 \\ -5u - 10v = & 60 \\ \hline -8v = & 120 \end{array} \; +$$

$-8v = 120$ dus $v = -15$

oplossing: $\begin{cases} u = 18 \\ v = -15 \end{cases}$

b. substitutie van 2de vergelijking in 1ste vergelijking geeft:
$5v = 4(v - 2) + 12{,}5$
$5v = 4v - 8 + 12{,}5$
$v = 4{,}5$
substitutie van $v = 4{,}5$ in 2de vergelijking geeft: $u = 4{,}5 - 2 = 2{,}5$

oplossing: $\begin{cases} u = 2{,}5 \\ v = 4{,}5 \end{cases}$

c. substitutie van 2de vergelijking in 1ste vergelijking geeft:
$u = 3(-0{,}5u - 10) - 18$
$u = -1{,}5u - 30 - 18$
$2{,}5u = -48$ dus $u = \dfrac{-48}{2{,}5} = -19{,}2$
Substitutie van $u = -19{,}2$ in de 2de vergelijking geeft: $v = -0{,}5 \cdot -19{,}2 - 10 = -0{,}4$

oplossing: $\begin{cases} u = -19{,}2 \\ v = -0{,}4 \end{cases}$

1.25 De prijzen inclusief BTW worden berekend door te vermenigvuldigen met 1,19; ze bedragen respectievelijk € 476,- , € 28,32 en € 8,93 (twee decimalen, het gaat immers om geldbedragen).

1.26 De prijzen exclusief BTW worden berekend door te delen door 1,19 ofwel te vermenigvuldigen met het omgekeerde van 1,19; ze bedragen respectievelijk € 83,19, € 713,45 en € 0,83

1.27 $449 \times \dfrac{0{,}19}{1{,}19}$, dus € 71,69

1.28 Vermeerderen met 50% betekent vermenigvuldigen met 1,5; verminderen met 50% betekent vermenigvuldigen met 0,5; in totaal dus $1{,}5 \cdot 0{,}5$ ofwel 0,75 hetgeen een vermindering met 25% oplevert. Het antwoord is dus -25%.

1.29 $0{,}65 \times 0{,}7 = 0{,}455$ dus in totaal 54,5% korting

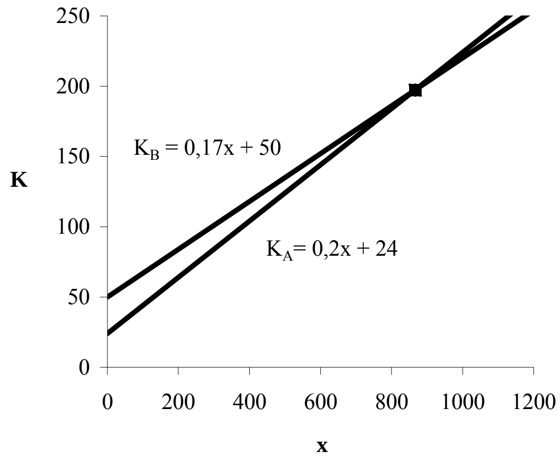
1.30 De groeifactor bedraagt $\dfrac{1}{1{,}26}$ ofwel 0,794 dus 20,6% lager

1.31 De groeifactor (ruim) 11, dus groeivoet is 10, dus groeipercentage 1000; dus 1000% inflatie.

1.32 De absolute groei bedraagt $K(1200) - K(1000) = 90$.

de relatieve groei bedraagt $\dfrac{K(1200) - K(1000)}{K(1000)} = \dfrac{90}{600} = 0{,}15$ dus 15%

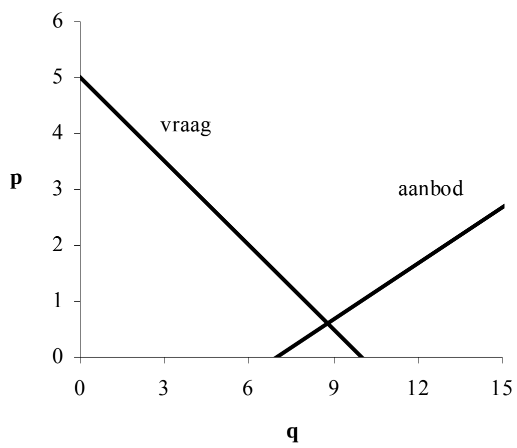
1.33 a. $K_A(x) = 24 + 0{,}2x$, en $K_B(x) = 50 + 0{,}17x$ (met x = aardgasverbruik per jaar in m^3; K in euro's).
b. Bereken het break-evenpunt: $K_A(x) = K_B(x)$. Dus $24 + 0{,}2x = 50 + 0{,}17x$. Hieruit volgt: $0{,}03x = 26$, dus $x = 26/0{,}03 = 866{,}7$. Vanaf 867 m^3 is energiebedrijf B voordeliger.
c. Zie hieronder.



1.34 a. De provisiekosten bij de NBA-bank zijn $9{,}5 + 0{,}0015 \times 3000 = 14$ euro; bij de Baro-bank: $0{,}002 \times 3000 = 6$ euro.
b. $K_{NBA}(W) = 9{,}5 + 0{,}0015W$ en $K_{BARO}(W) = 0{,}002W$ (euro), met W de waarde van het aandelenpakket.
c. Het gelijkstellen van deze beide kostenfuncties geeft de vergelijking $9{,}5 + 0{,}0015W = 0{,}002W$; de oplossing is W = 19.000 euro. Voor W > 19.000 zal de NBA-bank goedkoper zijn.

1.35 Uit $q_v = q_a$ volgt $-3p + 34 = 5p + 2$, dus $-8p = -32$. Conclusie: $p = 4$; invullen in bijvoorbeeld q_v levert: $q = 22$. Evenwichtsprijs en -hoeveelheid zijn dus respectievelijk 4 euro en 22.000 stuks.

1.36 a. Stel de beide functies aan elkaars gelijk: $3p + 7 = -2p + 10$. Hieruit volgt: $5p = 3$, dus $p = 0{,}6$; invullen van deze waarde in q_a of q_v levert: $q = 8{,}8$.
b. Zie grafiek:



1.37 a. Als p toeneemt van 4 tot 5, is $\Delta p = 1$; als p = 4 dan is q gelijk aan 60 en als p gelijk is aan 5 dan is q gelijk aan 59,25, dus $\Delta q = -0{,}75$.

De prijselasticiteit is gelijk aan $\dfrac{\Delta q/q}{\Delta p/p} = \dfrac{-1{,}25/60}{1/4} = -0{,}05$

Sneller is: $E_{p,q} = \dfrac{\Delta q}{\Delta p} \times \dfrac{p}{q} = -0{,}75 \times \dfrac{4}{60} = -0{,}05$

b. $= -0{,}75 \times \dfrac{p}{63 - 0{,}75p} = -\dfrac{1}{2}$, dus $\dfrac{-0{,}75p}{63 - 0{,}75p} = -\dfrac{1}{2}$. Kruislings vermenigvuldigen geeft:

1,5p = 63 – 0,75p. Hieruit volgt 2,25p = 63, dus p = 63/2,25 = 28

1.38 a. $q = -\dfrac{4}{7}p + 20$

b. $E_{p,q} = \dfrac{\Delta q}{\Delta p} \times \dfrac{p}{q} = -\dfrac{4}{7} \times \dfrac{14}{12} = -0{,}67$

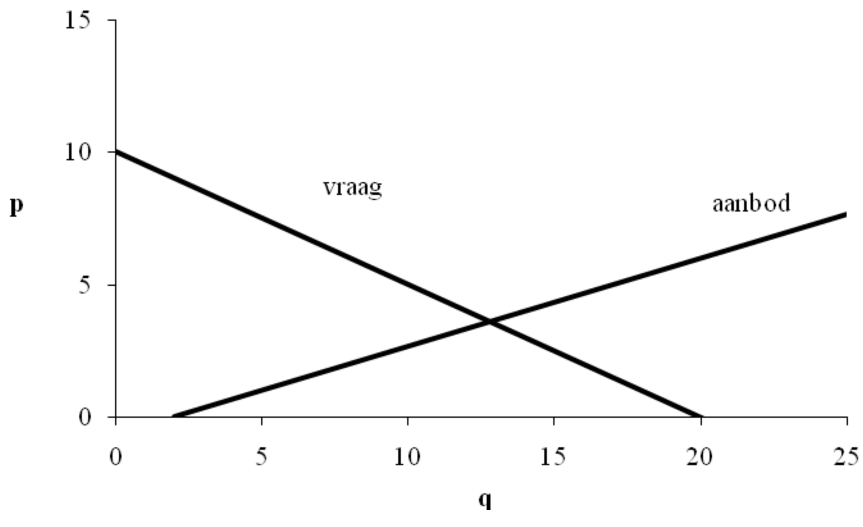
c. -0,67 (kan alleen met de tweede methode uit antwoord opgave 1.37; dit heet **puntelasticiteit**)

1.39 a. p(q) = -0,6q + 5,6 (m.b.v. Excel trendline)

b. Trendline met verwisseling van coördinaten levert: q(p) = -1,67p + 9,33 (op 2 decimalen afgerond).

c. Omwerken van p(q) naar q(p) klopt: ga uit van p = -0,6q + 5,6, dus 0,6q = -p + 5,6. Deel links en rechts door 0,6: q = -1,67p + 9,33.

1.40 Neem voor de aanbodfunctie bijvoorbeeld de (q;p)-punten (2;0) en (5;1), en voor de vraagfunctie (20;0) en (0;10).



1.41 Zie figuur 1.4 in paragraaf 1.12.

1.42 Zie onderstaand aflossingsschema.

	A	B	C	D	E
1	**Lening**				
2					
3	**Type lening**		Lineair		
4	**Kapitaal**		100000		
5	**Looptijd**		10		
6	**Interest**		4%		
7					
8	**Aflossingschema**				
9	Jaar	Aflossing	Interest	Totaal	Restschuld
10	1	10000	4000	14000	90000
11	2	10000	3600	13600	80000
12	3	10000	3200	13200	70000
13	4	10000	2800	12800	60000
14	5	10000	2400	12400	50000
15	6	10000	2000	12000	40000
16	7	10000	1600	11600	30000
17	8	10000	1200	11200	20000
18	9	10000	800	10800	10000
19	10	10000	400	10400	0

Er geldt: $A(t) = 10.000$, $I(t) = 4400 - 400t$, $T(t) = 14.400 - 400t$, $R(t) = 100.000 - 10.000t$ $(t = 1,\ldots,10)$

1.43 Zie onderstaande afschrijvingstabel:

	A	B	C	D	E
1	**Afschrijvingen**				
2					
3	**Type**		Lineair		
4	**Aanschafwaarde**		300000		
5	**Looptijd**		15		
6	**Interest**		6%		
7	**Restwaarde**		20000		
8					
9	**Jaar**	**Afschrijving**	**Interest**	**Totaal**	**Boekwaarde**
10	1	18666,67	18000	36666,67	281333,33
11	2	18666,67	16880	35546,67	262666,67
12	3	18666,67	15760	34426,67	244000
13	4	18666,67	14640	33306,67	225333,33
14	5	18666,67	13520	32186,67	206666,67
15	6	18666,67	12400	31066,67	188000
16	7	18666,67	11280	29946,67	169333,33
17	8	18666,67	10160	28826,67	150666,67
18	9	18666,67	9040	27706,67	132000
19	10	18666,67	7920	26586,67	113333,33
20	11	18666,67	6800	25466,67	94666,67
21	12	18666,67	5680	24346,67	76000
22	13	18666,67	4560	23226,67	57333,33
23	14	18666,67	3440	22106,67	38666,67
24	15	18666,67	2320	20986,67	20000

Er geldt: $A(t) = 18.666,67$, $I(t) = 19120 – 1120t$, $T(t) = 37786,67 – 1120t$, $BW(t) = 300.000 – 18666,67t$, voor $t = 1,\ldots,15$. $BW(7,25) = 300.000 – 18666,67\times 7,25 =$ € 164.666,67.

1.44 Ja, dit is een lineair afschrijvingsschema: zie tabel.

	A	B	C	D	E
1	**Afschrijvingen**				
2					
3	**Type**		Lineair		
4	**Aanschafwaarde**		750000		
5	**Looptijd**		8		
6	**Interest**		6,3%		
7	**Restwaarde**		30000		
8					
9	**Jaar**	**Afschrijving**	**Interest**	**Totaal**	**Boekwaarde**
10	1	90000	47250	137250	660000
11	2	90000	41580	131580	570000
12	3	90000	35910	125910	480000
13	4	90000	30240	120240	390000
14	5	90000	24570	114570	300000
15	6	90000	18900	108900	210000
16	7	90000	13230	103230	120000
17	8	90000	7560	97560	30000

Gemengde opgaven

1.45 a. -179
b. -d + m + 4
c. $\frac{68}{77}$
d. $\frac{7}{4}$
e. $-\frac{1}{13x}$
f. -15R

1.46 tegengestelde: $-\frac{5}{8}$; omgekeerde: $\frac{8}{5}$

1.47 a. 4xz + 18yz + 7x + 6y – 122
b. 48t – 150
c. 14pq – 8pr
d. $\frac{1}{T}+\frac{2T\times T}{T}=\frac{1+2T^2}{T}$ (zie hoofdstuk 2)

1.48 a. $\frac{9}{3D}+\frac{D\times D}{3D}=\frac{9+D^2}{3D}$ (zie hoofdstuk 2)
b. $\frac{2Y+10}{16+Y}$
c. $\frac{107x+15}{40}$
d. $\frac{5}{6}$

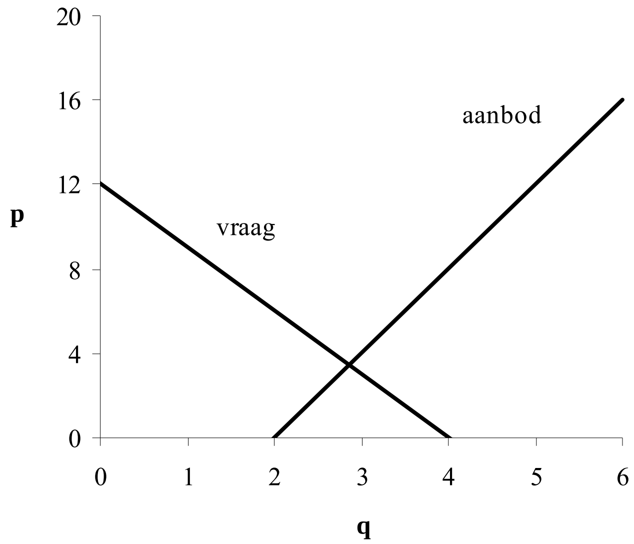
1.49 M(x) = -0,75x +14,25

1.50 a. $\frac{31}{21}$
b. 22
c. -12

1.51 a. $p = \frac{200}{37}$; $q = \frac{108}{37}$
b. Tweede vergelijking moet zijn: –p = q – 5. Antwoord: $p = \frac{47}{16}$; $q = \frac{33}{16}$

1.52 € 197,11 respectievelijk € 234,56

1.53 a. Zie grafiek.



b. $p = \frac{24}{7}$; $q = \frac{20}{7}$

1.54 a. q = -0,8p + 12
b. -2
c. p = 7,5; q = 6

1.55 Bij de afschrijving van de 'Sum of Years Digits' zijn alleen de afschrijvingen lineair: A(t) = 60.000 – 10.000t, voor t = 1 t/m 5. Het volledige afschrijvingsschema is:

Jaar	Interest	Afschrijving	Totaal	Boekwaarde
1	12000	50000	72000	130000
2	8400	40000	56400	90000
3	5520	30000	41520	60000
4	3360	20000	27360	30000
5	1920	10000	13920	20000

1.56 Ja, met kapitaal 2 miljoen, looptijd 10 jaar en interest 5,6% per jaar.

2 Exponentiële verbanden

2.1 a. 5^7
b. - (niet te schrijven als macht van één grondtal)
c. 20^3
d. $1{,}1^7$
e. $2^{10}\cdot 2^3 = 2^{13}$
f 3^{15}
g. - (niet te schrijven als macht van één grondtal)
h $1{,}015^{15}$
i. $1{,}04^{35}$
j . - (niet te schrijven als macht van één grondtal)
k. 0
l. $\left(\frac{66}{91}\right)^6$, of met het grondtal afgerond op 3 decimalen: $0{,}725^6$

2.2 a. k^{11}
b. $p^{10}q^5$
c. $(1 + r)^8$
d. $(1 + m)\cdot[(1+m) - 1] = (1 + m)\cdot m = (1 + m)m$
Of: $1 + 2m + m^2 - 1 - m = m + m^2 = m(1 + m)$

2.3 a. t^9
b. $\dfrac{p^{12}q^{15}}{r^4}$
c. $(p + q)^2 - (p - q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 - (p^2 - 2pq + q^2) = 4pq$
d $a^2 - 2b^2$

2.4 a. $\dfrac{10 + 5R}{(1 + R)^2}$
b. $\dfrac{i^2 + i + 1}{i^3}$

2.5

exponent:	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	....
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
macht van 5:	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25	125	625	....

$5^{10}:5^{-10} = 5^{20} \approx 9{,}5\cdot 10^{13}$, dus 5^{10} is $9{,}5\cdot 10^{13}$ keer zo groot als 5^{-10}

2.6 a. 5^3
b. $5^{-10} = \dfrac{1}{5^{10}}$
c. $a^{-6}b^3 = \dfrac{b^3}{a^6}$
d. $\dfrac{1}{p^7}$
e. 5^0 (= 1)

f. p^9

g. $\dfrac{1}{y^5}$

h. $\dfrac{b^5}{a}$

2.7 a. $(1 + R)^0 = 1$

b. $\dfrac{(1+R)^{10} - 1}{R}$

2.8 a. $7^{6/3} = 7^2$

b. $5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = 5^{\frac{9}{20}}$

c $\sqrt{30} = 30^{\frac{1}{2}}$

d. $1{,}06^{\frac{240}{12}} \times 1{,}06^{-25} = 1{,}06^{20} \times 1{,}06^{-25} = 1{,}06^{-5} = \dfrac{1}{1{,}06^5}$

e. $g^{\frac{5}{12}} \times g^{\frac{1}{2}} = g^{\frac{11}{12}}$

f. $\dfrac{f^{\frac{1}{4}}}{f^{\frac{2}{3}}} = f^{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}} = f^{-\frac{5}{12}} = \dfrac{1}{f^{\frac{5}{12}}}$

2.9 a. $\sqrt[3]{10}$

b. $1{,}1^{5/12} = \sqrt[12]{1{,}1^5}$

c. $2^{3/2} \times 3^{1/4} = \sqrt{2^3} \times \sqrt[4]{3} = \sqrt{8} \times \sqrt[4]{3}$

d. $g^{-1/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{g}}$

e. $r^{-2/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{r^2}}$

f. $(p^{7/5})^2 = p^{14/5} = \sqrt[5]{p^{14}}$

2.10 a. $5 \cdot 9 + \left(\dfrac{10}{25}\right)^{-1} = 45 + \dfrac{25}{10} = 45 + 2{,}5 = 47{,}5$

b. $\dfrac{2^4}{3^4} \times \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3^2 \times 2^3} = \dfrac{2^3}{3^3} - \dfrac{1}{3^3 \times 2^3} = \dfrac{8}{27} - \dfrac{1}{216} = \dfrac{64}{216} - \dfrac{1}{216} = \dfrac{63}{216} = \dfrac{7}{24}$

c. $50(1{,}44 + 1{,}2 + 1) - 40(1{,}21 - 1{,}1) = 50 \cdot 3{,}64 - 40 \cdot 0{,}11 = 182 - 4{,}4 = 177{,}6$

d. $(29/15)^2 - 1/9 + 1/16 = 3\dfrac{827}{1200} = 3{,}689$

2.11 a. $3^{-1} + 3^{-2} = 1/3 + 1/9 = \dfrac{4}{9}$

b $\sqrt[3]{64} + 2\sqrt{10} + 8 \cdot 10^{1,5} = 4 + 2\sqrt{10} + 80\sqrt{10} = \sqrt[3]{64} + 82\sqrt{10}$

c $(2\sqrt{3})^2 = 12$

d. $5^2 \times \frac{1}{10} + \sqrt[12]{5} = 2{,}5 + \sqrt[12]{5}$

2.12 a. $\sqrt[3]{p^5} \cdot \sqrt[4]{q^5}$

b. $2\sqrt{R}$

c. - (kan niet verder vereenvoudigd worden)

d. $\sqrt[5]{g^6}$

2.13 a. $F^{1/4}$

b. $x^{\frac{11}{12}}$

2.14 Noemer uitwerken: $(1+R)\cdot\left(1-\frac{1+g}{1+R}\right) = R - g$

2.15 a. 441

b. 10

c. $58\frac{521}{630}$

d. 720

e. -2.902.376.448.000.000

f. 0

2.16 a. $5^x = 100/0{,}2$ dus $5^x = 500$. Hieruit volgt: x = log 500 / log 5 = 3,86

b. $0{,}4^t = 4/6 = 2/3$, dus t = log (2/3) / log 0,4 = 0,44

c. $g^{10} = 2800/1800 \rightarrow g = (2800/1800)^{1/10} = 1{,}0452$, dus g = 1,05

d. n = 11,90

e. g = 1,43

f. $x = 3^4 = 81$

2.17 $g^5 = 30/15$, dus $g^5 = 2 \rightarrow g = 2^{1/5} = 1{,}1487$. Dan: $F(t) = F(0)\cdot 1{,}1487^t = 15\cdot 1{,}1487^t$

2.18 $g^5 = 3000/1700$, dus $g^5 = (3000/1700)^{1/5} = 1{,}12$. Dan is: $G(x) = G(0)\cdot 1{,}12^x$.
$G(0) = G(5)\cdot 1.12^{-5} = 963{,}33$, dus $G(x) = 963{,}33\cdot 1{,}12^x$

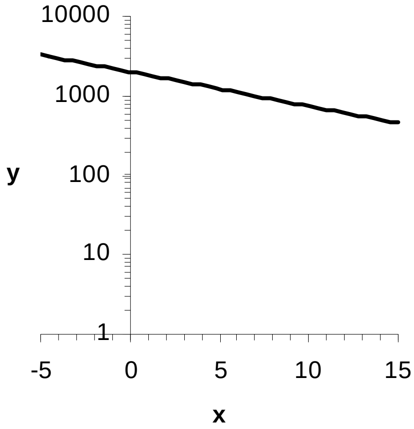
2.19 Groeifactor is g = 1 + 0,031 = 1,031. Los op: $1{,}031^t = 2$. Hieruit volgt: t = log 2 / log 1,031 = 22,7 jaar (dus voor het eerst na 23 jaar).

2.20 $1{,}05^t = 3 \rightarrow$ t = log 3 /log 1,05 = 22,5 jaar (dus voor het eerst na 23 jaar).

2.21 Bijvoorbeeld $y(x) = 1000\cdot 1{,}13^x$

2.22 Met ‘trendlijnmethode’; zie antwoorden bij 2.17 en 2.18.

2.23 Met trendlijnmethode: $H(x) = 2000 \cdot e^{-0,099x} = 2000 \cdot 0,9057^x$. Grafiek met logaritmische y-schaal:



2.24 a. $P(t) = 350 \cdot 0,85^t$ (met t = 0 op dit moment)
b. $P(5) = 350 \cdot 0,85^5 = 155,30$ (euro)
c. 3,44 jaar, dus na 42 maanden

2.25 a. Groeifactor: $g^{1,5} = 2$ dus $g = \sqrt[1,5]{2} = 1,5874$.
$A(t) = A(0) \cdot 1,5874^t$. A(0), het aantal op tijdstip t = 0 is niet gegeven.
b. $1,5874^t = 10$, dus t = log 10 / log 1,5874 = 5,0 jaar

2.26 Voor bijvoorbeeld een eindkapitaal van € 10.000 en een interest van 4% (per jaar) kan als werkblad worden gebruikt:

	A	B
1	**Eindkapitaal**	10000
2	**Interest**	4%
3	**Looptijd**	15
4		
5	**Startkapitaal**	=B1*(1+B2)^-B3

Het antwoord is dan € 5552,65

2.27 $1,02 + 1,02^2 + 1,02^3 + \ldots + 1,02^{50} = 86,27$. Voorbeeld van Excelwerkblad:

	A	B
1		1,02
2	1	=B1^A2
3	2	↓
4	3	copy
5	4	↓
…	…	
…	…	
51	50	↓
52		=SUM(B2:B50)

2.28 $1,02 \times 1,02^2 \times 1,02^3 \times \ldots \times 1,02^{50} = 92.303.675.844,45$. Gebruik hetzelfde werkbad als in opgave 2.27, maar zet nu in cel B52: =PRODUCT(B2:B50).

Gemengde opgaven

2.29 a. x^{43}

b. $\dfrac{a^{14}b^{35}}{c^7}$

c. $5x^2 + 5y^2$

2.30 a. $\sqrt[4]{8}$

b. $\sqrt[7]{6^8} = 7{,}75$

c. $a\sqrt[4]{b^3}$

d. $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^7}}$

e. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{p^7}}$

f. $1{,}04^{16}$

2.31 a. $\sqrt[3]{x^5}$

b. 0,5 NB: opgave is misdruk. Moet zijn: $0{,}5\cdot c^{-0,5}\cdot c\cdot c^{-0,5}$. Antwoord; 0,5

c. $\sqrt[20]{y^{169}} = y^8\sqrt[20]{y^9}$

2.32 a. 59

b. 75

c. 301.600

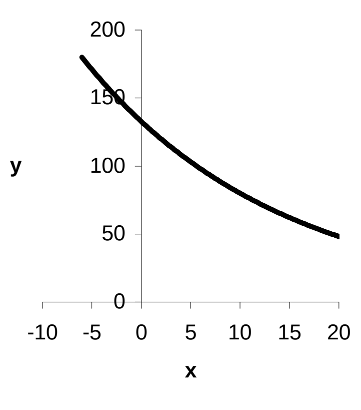
2.33 a. De verhouding in kracht tussen beide aardbevingen is $\dfrac{10^{9,3}}{10^{9,0}} = 10^{0,3} \approx 2$

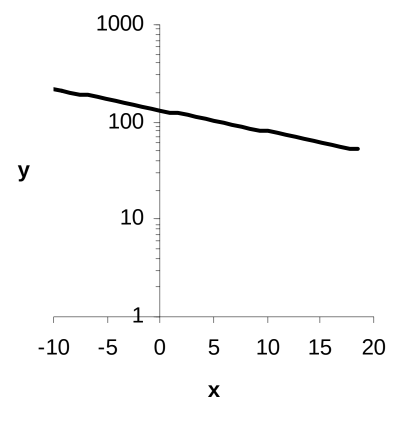
b. $\dfrac{10^{7,3}}{10^6} = 10^{1,3} \approx 20$

2.34 a. Excel geeft met de trendlijnmethode: $y = 132{,}74\cdot e^{-0,0505x} = 132{,}74\cdot 0{,}95^x$

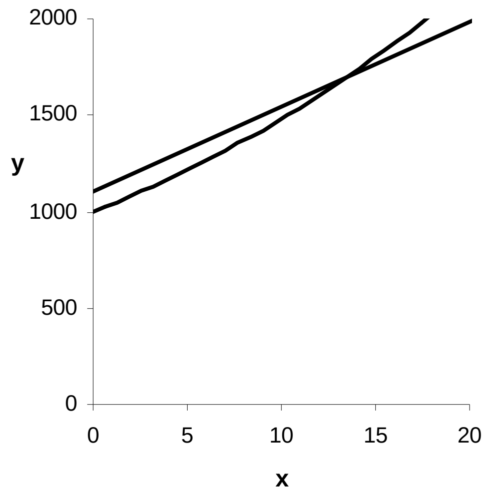
b. $132{,}74 \times 0{,}95^{10} \approx 80$ en $132{,}74 \times 0{,}95^{10,5} \approx 78$

c. Zie onderstaande grafieken

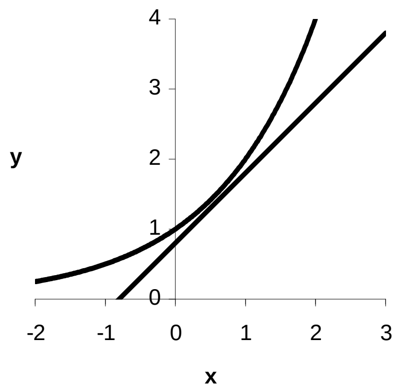




2.35 a. De solver geeft x = 13,31 als snijpunt (y = 1686).
b. Grafiek: zie hieronder.



2.36 a. De Solver voor de vergelijking $2^x = x + 0,8$ geeft geen oplossingen. De grafiek van beide functies bevestigt dit:



b. a ≥ 0,914 (gevonden door ‘trial and error’)

2.37 $1000 \cdot 1,04^x = 2000 \cdot 1,03^x$. Dan is x = log 2 / log(1,04/1,03) = 71,7 jaar.
Kan ook met Solver in Excel worden opgelost.

3 Andere economische verbanden

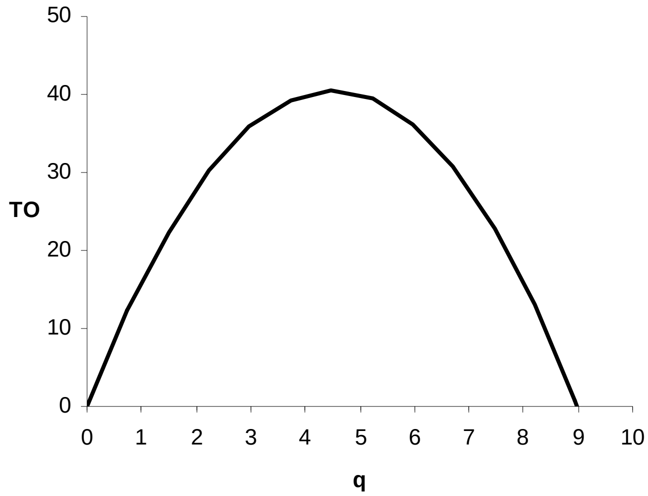
3.1 a. Los op: TO = 0 → $-2q^2 + 18q = q \cdot (-2q + 18) = 0$, dus q = 0 of q = 9. TO is een bergparabool en heeft dus alleen een economische betekenis als $0 \leq q \leq 9$.

b. De symmetrieas heeft vergelijking x = -b/2a = -18/-4 = 4,5. De top van de parabool TO is dus TO(4,5) = 40,5 en is een maximum.

c. p = -2q + 18, direct af te lezen uit TO = p·q

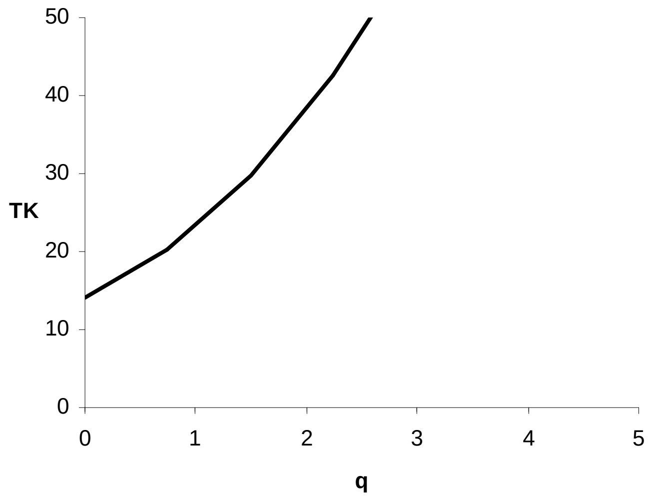
d. Symmetrieas heeft vergelijking q = -b/2a = 4,5 (het midden van de twee nulpunten), dus p = -2·4,5q + 18 = 9

e. Zie de grafiek hieronder.



3.2 a. Symmetrieas heeft vergelijking q = -b/2a = -1. Invullen geeft TK = 11. Economisch heeft dit punt geen waarde.

b. Zie de grafiek hieronder; alleen getekend voor $q \geq 0$.



3.3 a. Met de abc-formule: x = -3 en x = -0,5.

b. $q^2 - 5q - 3 = 0$. Oplossingen zijn: $q = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2} =$ -0,54 en 5,54

c. Omdat hier al in twee factoren is ontbonden, zijn de oplossingen af te lezen: 14 en 15.

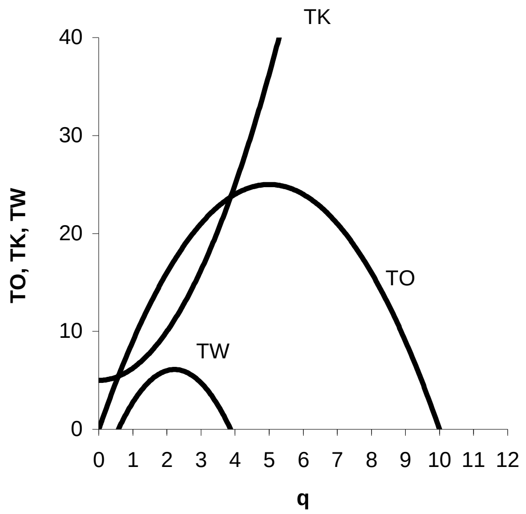
d. De discriminant van deze vergelijking is –20; er zijn dus geen oplossingen.

e. Oplossingen zijn 0,5 en 2.

f. Schrijf als $6x^2 = -15$. Links altijd positief of 0; rechts -15. Er zijn dus geen oplossingen.
g. $x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 \rightarrow x = 0$ of $x = 1$
h. $-4q^2 + 2q - 7 = 0$. Heeft geen oplossingen: D = -108.
i. $2x^2 + 8x + 8 = 0$. Heeft één (D = 0) oplossing: -2. Kan ook door als volgt te redeneren: $x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 0$

3.4 a. $(x - 4)(x - 6) = 0$
b. $(x - 7)^2 = 0$
c. $x^2 = -1$
d. $q(q - 16) = 0$
e. $(x - 7)^2 = 0$

3.5 a. Zie onderstaande grafiek.



b. TO = TK $\rightarrow -q^2 + 10q = 1{,}25q^2 + 5 \rightarrow -2{,}25q^2 + 10q - 5 = 0$. Met de abc-formule geeft dit de oplossingen $(-10 \pm \sqrt{55})/-4{,}5 = 0{,}57$ en $3{,}87$
c. De maximale wint treedt op bij $q = (0{,}57 + 3{,}87)/2 = 2{,}22$ (of met de formule van de symmetrieas $-b/2a$). TW(2,22) = 6,11
d. Zie grafiek in onderdeel a.

3.6 Als er geen afzet is, is er ook geen omzet, m.a.w. als q = 0 dan ook TO = p·q = 0.

3.7 Zie de antwoorden aldaar. Als voorbeeld nemen we onderdeel b. We brengen de vergelijking op 0, dus $q^2 - 5q - 3 = 0$. Kies bijvoorbeeld in A2 de waarde 0. Zet in cel B2 de formule: =A2^2-5*A2-3.

	A	B
1	x	functiewaarde
2	0	=A2^2-5*A2-3

Voer de stappen uit:
1. ‘Tools’
2. ‘Solver’
3. ‘Set Target Cell:’ B2
4. ‘Equal to:’ vink ‘Value of’ aan, en vul 0 in
5. ‘By Changing Cells:’ vul A2 in
6. ‘Solve’

Het resultaat is:

	A	B
1	x	waarde
2	-0,54138	-3,06E-07

Bij een 'startwaarde'(A2) van 3 krijgen we met de solver de tweede oplossing 5,54.

3.8 Kies een x-waarde in cel A2 (bijvoorbeeld 0) en typ de formule voor de functie f(x) in cel B2:

	A	B
1	x	f(x)
2	0	-0,126*(x-56,6)^2+58

Roep de Solver op en laat dit programma naar een maximum (bergparabool!) zoeken. Resultaat:

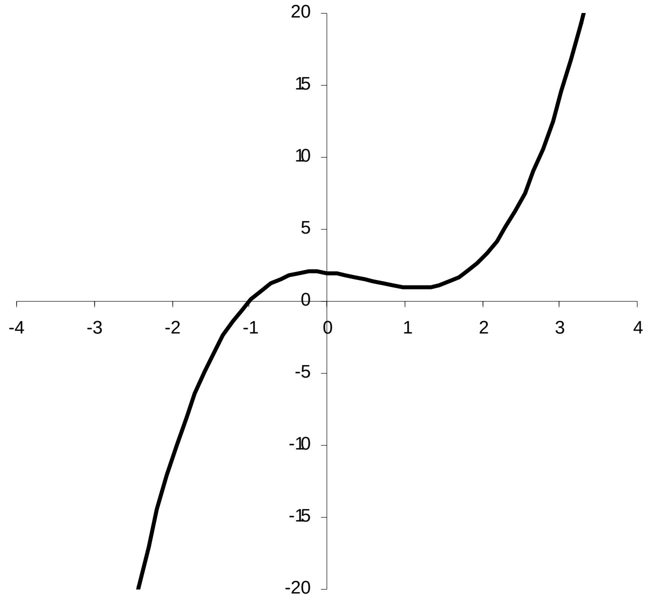
1	x	f(x)
2	56,6	58

3.9 Met dezelfde methode als in opgave 3.8 moet nu het minimum worden gezocht. Dit is bij x = -52,72; het minimum is dan f(-52,72) = -18.021,63.

3.10 De parabolen $f(x) = x^2$ en $-x^2 – 1$ snijden elkaar niet. Bij het bepalen van snijpunten met de Solver verschijnt de mededeling "Solver could not find a feasible solution".

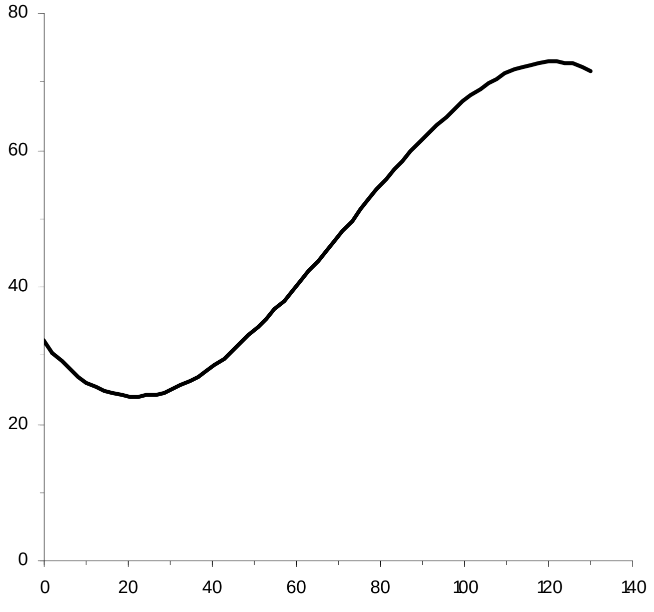
3.11
a. Ja, van graad 6.
b. Ja, van graad 14.
c. Nee, 2^x is geen polynoom, maar een exponentiële functie.
d. Nee, $1/x = x^{-1}$ is wel een macht (van x), maar geen polynoom.
e. Nee, x^{-6} is wel een macht, maar geen polynoom.
f. Ja, graad is 5.
g. Ja, van graad 2.
h. Ja, van graad 0 (want $1 = x^0$).

3.12



Het (lokaal) minimum is 0,96, bij x = 1,15. Het (lokaal) maximum is 2,04, bij x = -0,15. Beide zijn te vinden met de Solver en de methode die in opgave 3.8 gebruikt is. De startwaarde moet niet 'te ver uit de buurt' worden gekozen. De functie is degressief dalend tussen x = -0,15 en x = 1,15 en progressief stijgend vanaf x = 1,15

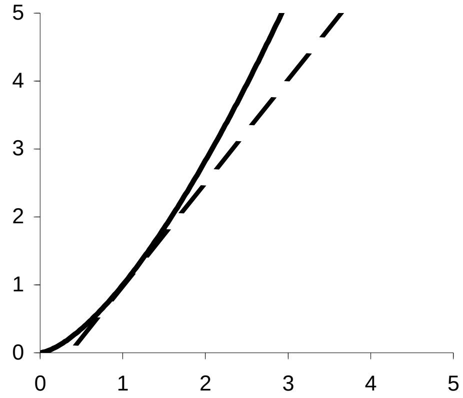
3.13 a. Zie onderstaande grafiek.



b. Een dalende kostenfunctie voor waarden tussen 0 en ongeveer 20 en vanaf ongeveer 120 is niet erg realistisch.

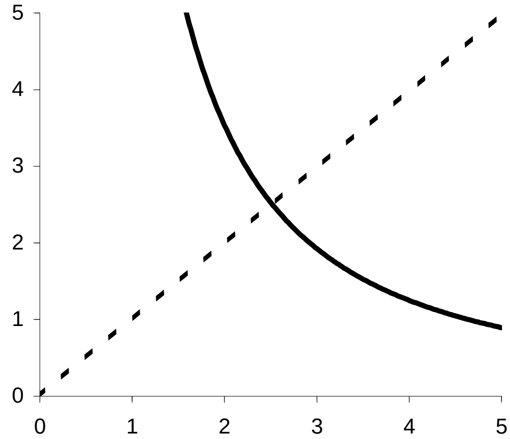
c. Met de Solver volgt een lokaal minimum van TK = 23,99 bij q = 21,75 en een lokaal maximum van 72,93 bij q = 121,05.

3.14 a. $f(x) = x\sqrt{x} = x^{3/2} = x^{1,5}$ is een machtfunctie (van de variabele x).
b. Zie de grafiek.



c. Ja, een lokaal (rand)minimum 0 voor x = 0.
d. Bereken met de Solver het enige snijpunt van de twee functies f(x) en k(x): (1; 1).

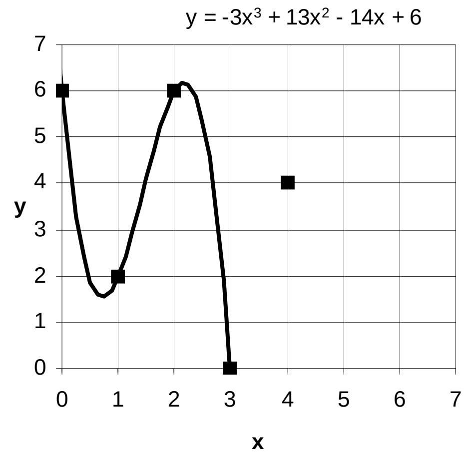
3.15 a. De functie m(x) is een machtfunctie.
b. Zie bijbehorende grafiek.



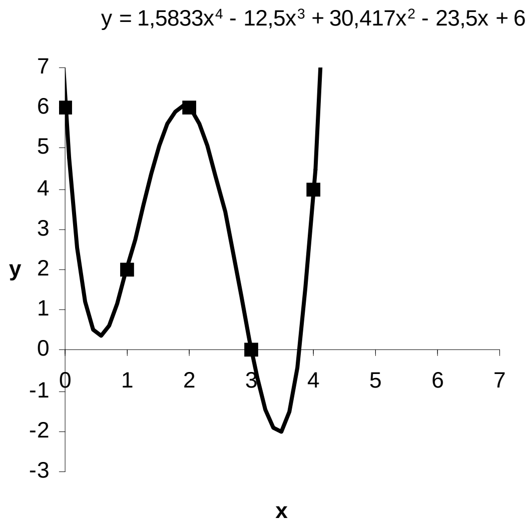
c. De x-as is de horizontale en de y-as is de verticale asymptoot.
d. Met de Solver (verschil tussen m(x) en y = x op waarde nul laten zetten) volgt het snijpunt (2,35;2,35).

3.16 BMI is een lineaire functie van g.

3.17 a. $y(x) = -3x^3 + 13x^2 - 14x + 6$ (zie grafiek), bepaald met de trendlijn methode en keuze voor 'Polynomial', 'Order' 3.



b. Zie grafiek.



c. Excel geeft $y = 2 \cdot x^{0,5}$, ofwel $y = 2\sqrt{x}$.
d. $y = 9 \cdot x^{-0,585}$
e. Niet mogelijk: een machtfunctie gaat niet door de x-as.

3.18 a. $(3,4q + 17)/q = 5$, dus $3,4q + 17 = 5q$, dus $1,6q = 17$ en daarmee $q = 10,625$.
b. $GTK = 3,4 + 17/q$, dus $GTK \geq 3,4$

3.19 Oplossen van de vergelijking GTK = 9 levert, met kruislings vermenigvuldigen: $0,3q^2 + 5q + 8 = 9q$, dus $0,3q^2 - 4q + 8 = 0$. De oplossing van deze kwadratische vergelijking is (afgerond) bij 25 en 109 stuks per week

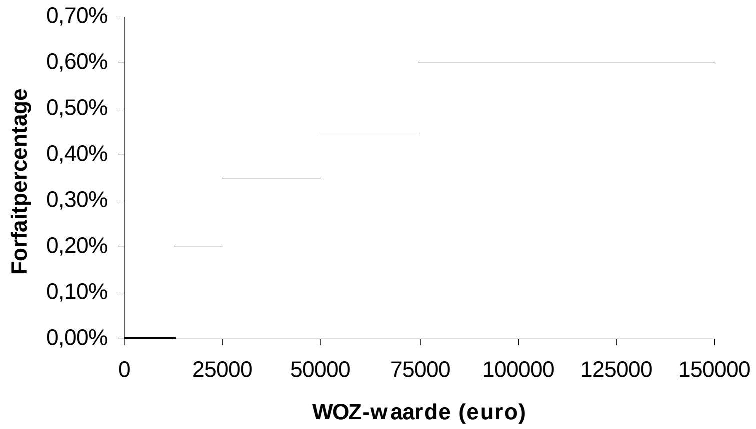
3.20 $1/d = 4,25 - d$. Na kruislings vermenigvuldigen volgt: $1 = 4,25d - d^2$, ofwel $d^2 - 4,25d + 1 = 0$. De oplossing van deze kwadratische vergelijking is $d = 0,25$ en $d = 4$.

3.21 $\frac{2}{4x} + \frac{1}{4x} = 10$, dus $\frac{3}{4x} = 10$. Hieruit volgt: $40x = 3$ en dus $x = 3/40$.

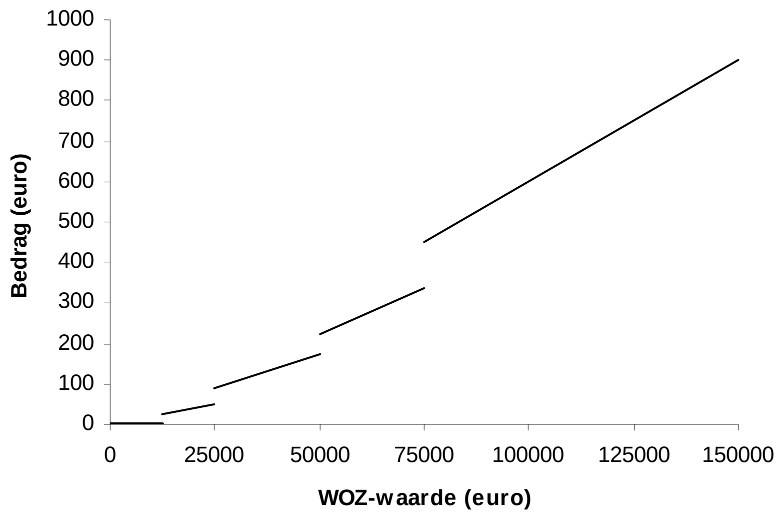
3.22 Gelijkstellen van aanbod- en vraagfunctie levert: $\frac{4000}{p} = 3p - 500$. dus $4000 = 3p^2 - 500p$, ofwel $3p^2 - 500p - 4000 = 0$. De positieve oplossing van deze kwadratische vergelijking is $p = 174{,}32$. Invullen levert $q = 23$.

3.23 Snijdt 7x met 2000×6. Uitkomst 1714,3. Dus bij 1715 artikelen of meer is het economisch gunstiger is om 2000 artikelen af te nemen.

3.24 a.

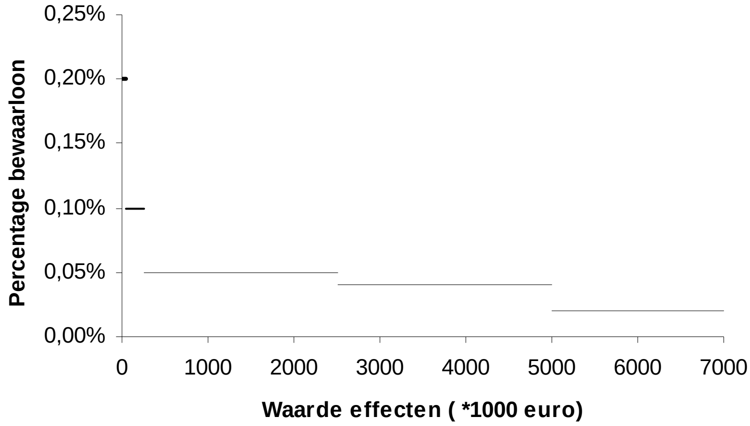


b.

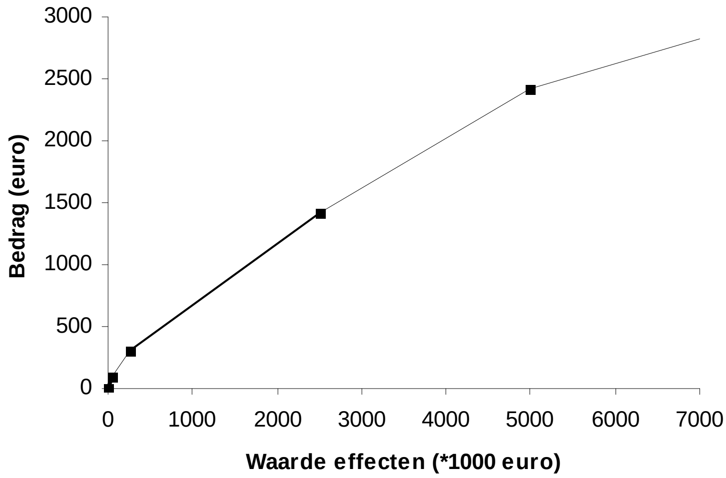


c. Alle stuksgewijs rechte lijnen gaan door de oorsprong (0;0).

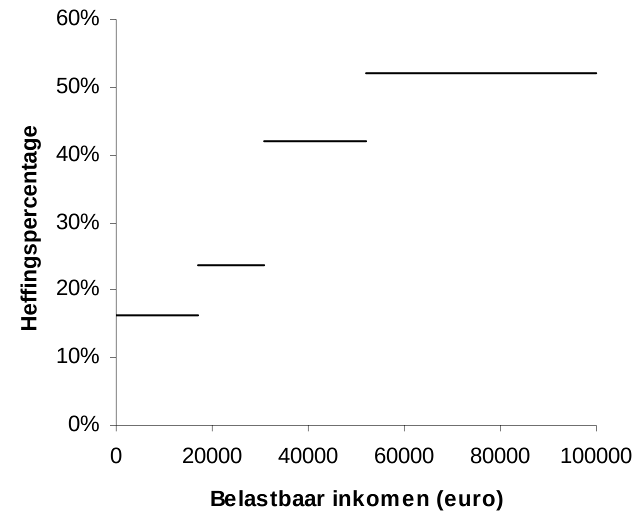
3.25 a.


0,25%
0,20%
0,15%
0,10%
0,05%
0,00%
Percentage bewaarloon
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
Waarde effecten (*1000 euro)

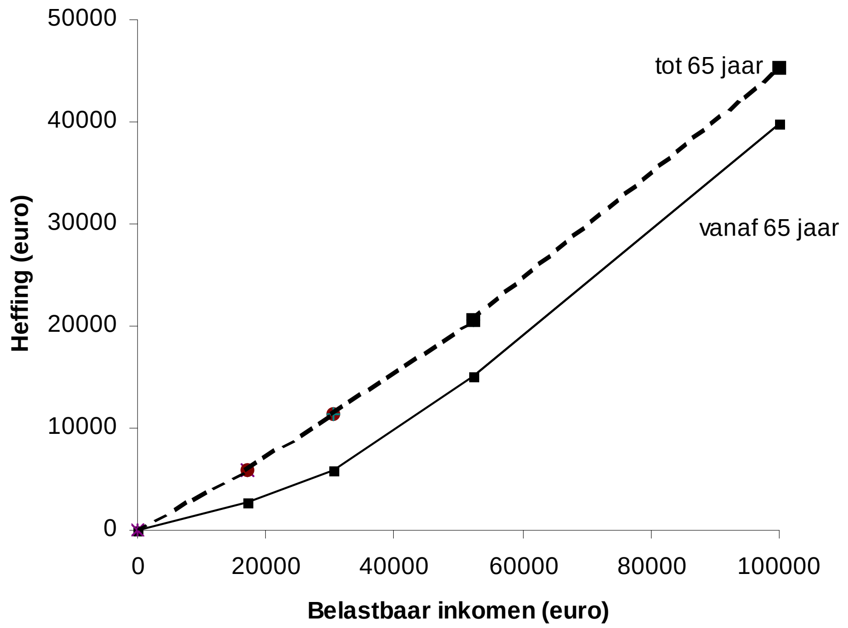
b.


3000
2500
2000
1500
1000
500
0
Bedrag (euro)
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
Waarde effecten (*1000 euro)

3.26



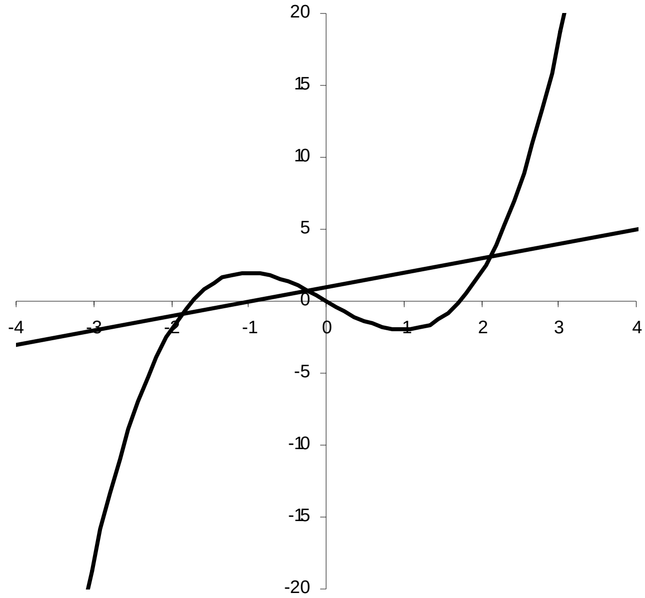
Heffingspercentage
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
0
20000
40000
60000
80000
100000
Belastbaar inkomen (euro)



Heffing (euro)
50000
40000
30000
20000
10000
0
tot 65 jaar
vanaf 65 jaar
0
20000
40000
60000
80000
100000
Belastbaar inkomen (euro)

Gemengde opgaven

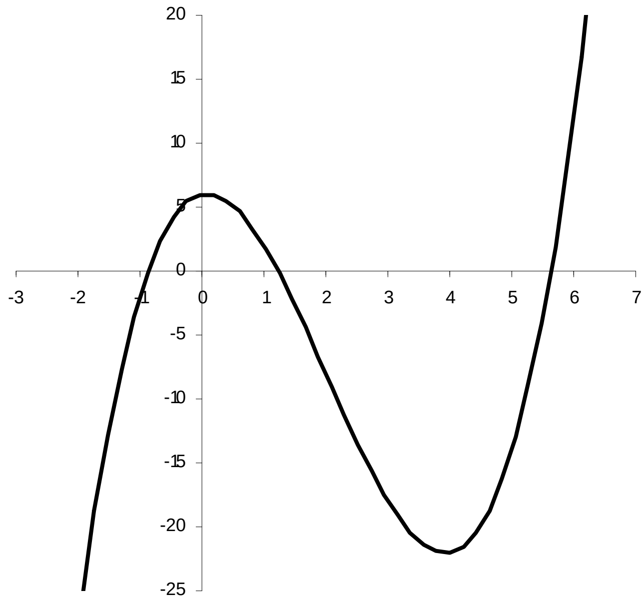
3.27 a.



b. Nulpunten zijn -√3, 0 en √3; lokaal minimum is (1; -2), lokaal maximum is (-1; 2).
c. Progressief stijgen vanaf x = 1; degressief stijgend tot aan x = -1.
d. Er zijn drie snijpunten (zie grafiek), gevonden met de Solver: (-1,86; -0,86), (-0,25; 0,75) en (2,11; 3,11).

3.28 De oplossingen zijn (-1 ±√5)/2, dus, afgerond op drie decimalen, -1,618 en 0,618.

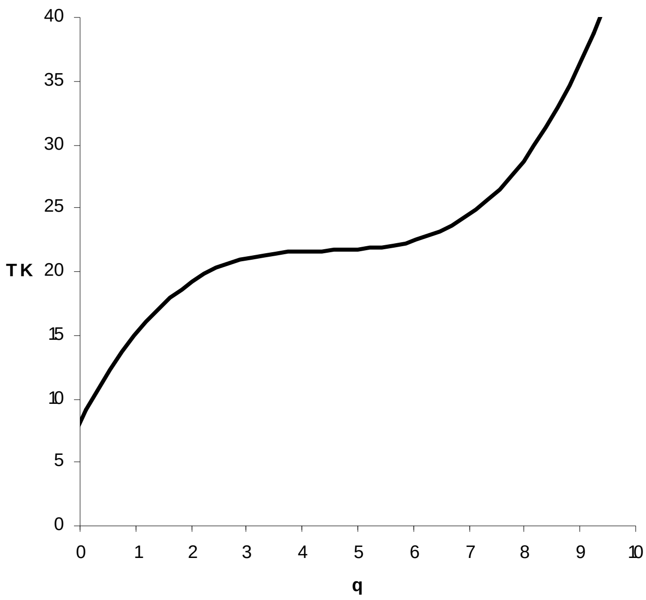
3.29 Lokaal minimum (3,91; -34,04); lokaal maximum (0,09; -5,96)



3.30 a. y= 0,4x + 0,6
b. bijvoorbeeld $y = -0{,}1x^2 + 1{,}1x$ (door extra punt (0; 0)) of $y = -0{,}15x^2 + 1{,}45x - 0{,}3$ (door (2; 2))
c. $y = 0{,}803 \cdot 1{,}246^x$

3.31 a. $TK(3) = 21{,}05$; dus $21{,}05 \times$ € 100000 = € 2.105.000

b.



c. TK = 30 oplossen met Solver-techniek. Antwoord: q = 8,196,1, dus 8196 producten.

d. Bij ongeveer 4500 stuks per dag (q = 4,5) neemt TK het minst toe.

3.32 a. $y = -0{,}6667x^2 + 3{,}6667x - 2$

b. $y = 0{,}2667x^3 - 2{,}8x^2 + 8{,}7333x - 5{,}2$

c. $y = -x + 6$

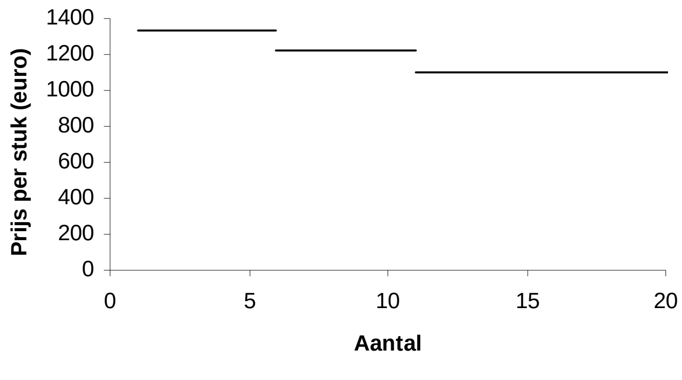
d. $y = 14{,}112 \cdot x^{-1{,}4094}$

e. $y = 10{,}125 \cdot e^{-0{,}4055\,x} = 10{,}125 \cdot 0{,}667^{\,x}$

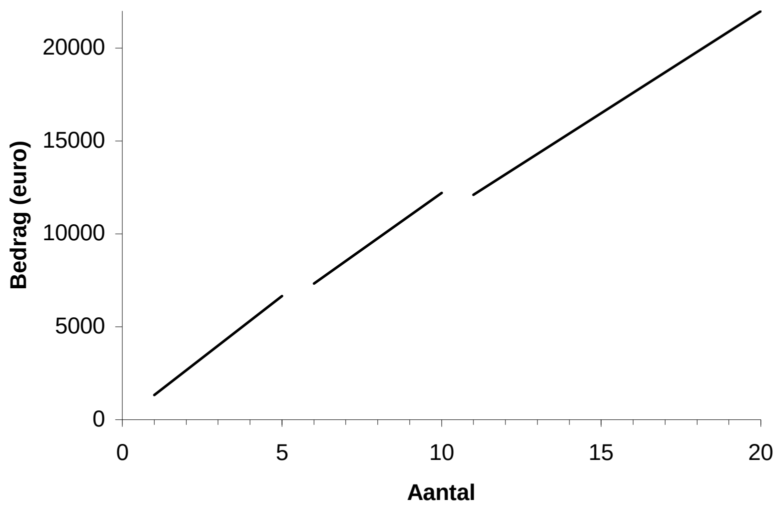
3.33 a. Kwadratische vergelijking met oplossingen $(6 \pm \sqrt{20})/0.8 = 13{,}1$ en 1,9.

b. GTK is minimaal voor q = 5 (GTK is dan 10). Techniek: Solver.

3.34 a.



b.



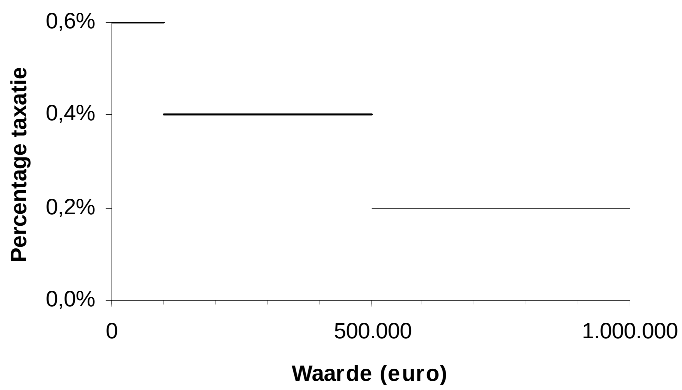
c. Bij een oorspronkelijk plan tot aankoop van 10 exemplaren kan men economisch beter 11 aanschaffen.

3.35 NB: De URL voor de internetcase moet zijn:
www.simonis-buunk.nl/taxeren/taxeren.htm

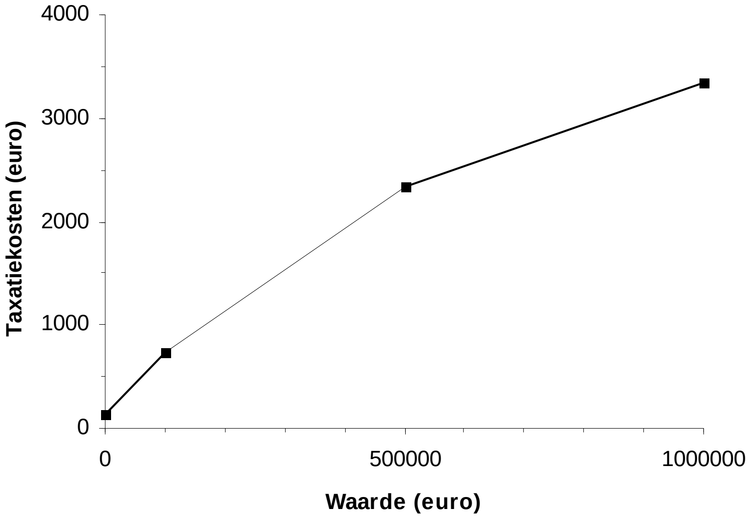
a. Taxatiekosten Kunsthandel Simonis en Buunk te Ede, 2006-06-07.
b. Ja; vast tarief € 140 en daarbij:

Bedragen				Perc.
	0	t/m	100000	0,60%
over het meerdere van	100000	t/m	500000	0,40%
over het meerdere van	500000			0,20%

c. Grafiek taxatietarief:



d. Grafiek taxatiekosten:



4 Financiële rekenkunde

4.1 a. $11.225 \cdot (1 + 0,05 \cdot 3.5) = 13.189,38$
b. $11.225 \cdot (1 + 0,05 \cdot [5/12]) = 11.458,85$
c. $11.225 \cdot (1 + 0,05 \cdot [55/12]) = 13.797,40$
d. $11.225 \cdot (1 + 0,05 \cdot [278/365]) = 11.652,47$

4.2 a. I = Interestvergoeding = $K \cdot i \cdot n = 658,75 \rightarrow K \cdot 0,06 \cdot 17/12 = 658,75 \rightarrow K = 7.750$
b. $I = K \cdot i \cdot n = 4780 \cdot 0,04 \cdot 26/12 = 414,27$
c. $I = K \cdot i \cdot n \rightarrow 3168 = 9600 \cdot i \cdot 72/12 = 0,055$ dus 5,5%
d. $6500 \cdot 0,0725 \cdot n = 294,53 \rightarrow n = 294,53/(6500 \cdot 0,0725) = 0,625$ jaar $\approx 0,625 \cdot 12 = 7,5$ maanden

4.3 Interestvergoeding is $2.545,39 - 2.500 = 45,39 = K \cdot i \cdot n$, dus $45,39 = 2.500 \cdot 0,0275 \cdot n$. Dus $n = 45,39/(2.500 \cdot 0,0275) = 0,6602$ jaar. In dagen is dit $0,6602 \cdot 365 = 241$ dagen.

4.4 $EW = 25.000 \cdot 1.05^{12} = 44.896,41$

4.5 $CW = 50.000 \cdot 1,06^{-20} = \dfrac{50.000}{1,06^{20}} = 15.590,24$

4.6 $EW = 1500 \cdot 1,035^{11} + 2000 \cdot 1,035^{10} = 5.011,15$

4.7 Het antwoord is de som van de contante waarde van die vier cashflows:
$120.000 \cdot 1,08^{-1} + 140.000 \cdot 1,08^{-2} + 160.00 \cdot 1,08^{-3} + 140.000 \cdot 1,08^{-4} = 461.055,88$

4.8 Dit is een meetkundige rij met 10 termen, $a = 500 \cdot 1,06$ en $g = 1,06$. De som is:

$$s_{10} = 500 \cdot 1,06 \frac{1,06^{10} - 1}{0,06} = 6.985,82$$

4.9 Dit is een meetkundige rij met 20 termen, $a = 5600 \cdot 1,045^{-1}$ en $g = 1,045^{-1}$. De som is:

$$CW = 5600 \cdot 1,045^{-1} \cdot \frac{1 - 1,045^{-20}}{1 - 1,045^{-1}} = 72.844,44$$

4.10 De maandinterest volgt uit $1,049^{1/12} - 1 = 0,003994\ldots$. Let op: de interest niet tussentijds afronden! De drie punten symboliseren onafgeronde waarden. De 360 maandbetalingen vormen een meetkundige rij met $a = 1024 \cdot 1,0039944\ldots^{-1}$ en $g = 1,003994\ldots^{-1}$. De som is:

$$CW = 1024 \cdot 1,003994\ldots^{-1} \cdot \frac{1 - 1,003994\ldots^{-360}}{1 - 1,003994\ldots^{-1}} = 195.323,20$$

4.11 Er zijn *twaalf* stortingen (1 december 2002 tot en met 1 december 2013) van elk € 1000. De eindwaarde, vlak na de 12e storting, is:

$$EW = 1000 \cdot \frac{1,035^{12} - 1}{0,035} = 14.601,96$$

4.12 De eindwaarde van de 18 stortingen (noem ze X) moet € 30.000 zijn, dus:

$$EW = X \cdot \frac{1,04^{18} - 1}{0,04} = 30.000 \rightarrow X \cdot 25,6454\ldots = 30.000 \rightarrow X = 1.169,80$$

4.13 De eindwaarde is die uit opgave 4.11, met een vermindering van de overgeslagen, 8 jaar opgerente storting van € 1000 uit 2005:

$$\mathrm{EW} = 1000 \cdot \frac{1{,}035^{12} - 1}{0{,}035} - 1000 \cdot 1{,}035^{8} = 13.285{,}15$$

4.14 De maandinterest volgt uit $1{,}037^{1/12} - 1 = 0{,}00303\ldots$ De eindwaarde is:

$$\mathrm{EW} = 50 \cdot 1{,}00303\ldots \frac{1{,}00303\ldots^{24} - 1}{0{,}00303\ldots} = 1.246{,}56$$

De factor 1,00303… is de extra oprenting omdat de eindwaarde één maand na de laatste storting wordt gevraagd. Dit is de formule van de prenumerando eindwaarde, zie paragraaf 4.9.

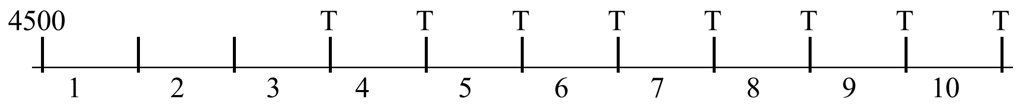
4.15 $$\mathrm{CW} = 295 \cdot \frac{1 - 1{,}01^{-18}}{0{,}01} = 4.837{,}49$$

4.16 De contante waarde van de 60 postnumerando termijnen (T) moet het geleende kapitaal van € 15.000 opleveren:

$$15.000 == \mathrm{T} \cdot \frac{1 - 1{,}006^{-60}}{0{,}006} \rightarrow 15.000 = 50{,}262\ldots \rightarrow \mathrm{T} = 298{,}44$$

4.17 $$\mathrm{CW} = 17.500 \cdot \frac{1 - 1{,}015^{-10}}{0{,}015} = 161.388{,}23$$

4.18 De tijdlijn bij deze opgave is:



De contante waarde van de acht termijnen T moet het bedrag 4.500 zijn. Vat die acht termijnen op als een postnumerando rente; dan moeten we die waarde nog twee jaar terugrenten:

$$4.500 = 1{,}03^{-2} \cdot \mathrm{T} \cdot \frac{1 - 1{,}03^{-8}}{0{,}03} \rightarrow 4.500 = 6{,}616\ldots \cdot \mathrm{T} \rightarrow \mathrm{T} = 680{,}09$$

4.19 $$\mathrm{EW} = 1300 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{1{,}03^{30} - 1}{0{,}03} = 1300 \cdot 49{,}0026\ldots = 63.703{,}48$$

4.20 Dit is de eindwaarde van een prenumerando rente van 15 termijnen van € 600 jaarlijks, bij een interest van 3,5% per jaar, onder aftrek van een 10 jaar opgerente ‘derving’ van € 400. Zie de tijdlijn hieronder:

600	600	600	600	600	*200*	600	600	600	600	600	EW
1	2	3	4	5	6	7	…	…	14	15	

$$\text{EW} = 600 \cdot 1{,}035 \cdot \frac{1{,}035^{15} - 1}{0{,}035} - 400 \cdot 1{,}035^{10} = 11.418{,}38$$

4.21 De jaarpremie is steeds 12·110·0,96 = 1.267,20 euro. De (prenumerando) contante waarde van de 12 maandpremies is:

(i) $\text{CW} = 110 \cdot 1{,}003 \cdot \dfrac{1 - 1{,}003^{-12}}{0{,}003} = 1.298{,}50$

(ii) $\text{CW} = 110 \cdot 1{,}004 \cdot \dfrac{1 - 1{,}004^{-12}}{0{,}004} = 1.291{,}46$

(iii) $\text{CW} = 110 \cdot 1{,}00486... \cdot \dfrac{1 - 1{,}00486^{-12}}{0{,}00486...} = 1.285{,}39$

Van de gevallen (i) t/m (iii) heeft (iii) de laagste contante waarde (hoogste maandinterest!), maar de betaling *ineens* heeft economisch de voorkeur.

4.22 De contante waarde van de op te nemen prenumerando bedragen (T) moet gelijk zijn aan het te ontvangen bedrag:

$56.000 = T \cdot \ddot{a}_{12\neg 0{,}4}$), dus

$$56.000 = T \cdot 1{,}04 \cdot \frac{1 - 1{,}04^{-10}}{0{,}04} \rightarrow T = 6.638{,}74$$

4.23 Dit is een postnumerando oneindige rente. De contante waarde is:

$$\text{CW} = T \times \frac{1}{r} = 2000 \times \frac{1}{0{,}04} = 50.000$$

4.24 Dit is een prenumerando oneindige rente, met contante waarde:

$$\text{CW} = T \cdot \frac{1 + r}{r} = 2000 \times \frac{1{,}04}{0{,}04} = 52.000$$

4.25 Reken eerst de jaarinterest om naar kwartaalinterest: $1{,}06^{\frac{1}{4}} = 1{,}01467...$ Dan is de contante waarde:

$$\text{CW} = 1400 \cdot \frac{1}{0{,}01467...} = 95.407{,}84$$

4.26 a.

Jaar	Aflossing	Interest	Totaal	Restschuld
1	20000	13000	33000	180000
2	20000	11700	31700	160000
3	20000	10400	30400	140000

b. Het 6^e interestdeel is de restschuld aan het eind van het 5^e jaar maal het interestpercentage, dus 100.000 × 0,065 = 6.500.

c. De som van alle interestdelen is:
13.000 + 11.700 + 10.400 + … + 3.900 + 2.600 + 1.300
Dit is een rekenkundige rij (zie paragraaf 1.13.3). Tel deze 10 termen als volgt op:
1^e + 10^e: 13.000 + 1.300 = 14.300
2^e + 9^e: 11.700 + 2.600 = 14.300
3^e + 8^e: 10.440 + 3.900 = 14.300
etc.
Totaal 5· 14.300 = 71.500

4.27 a. $\text{Ann} = \dfrac{K}{a_{n\neg p}} = \dfrac{1.000.000}{a_{10\neg 5,9}} = 135.224,98$.

b. Restschuld na 5 jaar = R_5 = CW toekomstige annuïteiten = $135.224,98 \cdot a_{5\neg 5,9}$ = 571.169,76.

c. Omdat bij een annuïteitenlening de aflossingen een meetkundige rij vormen, en (dus) relatief lager beginnen.

d. Nu wordt de annuïteit: $\text{Ann} = \dfrac{K}{\ddot{a}_{n\neg p}} = \dfrac{1.000.000}{\ddot{a}_{10\neg 5,9}} = 127.691$.

4.28 a. Reken bijvoorbeeld de jaarrente om naar maandrente: $(1{,}039)^{1/12}$ = 1,00319…; dit is 0,319…% per maand, dus **niet** de gegeven maandrente in de tabel (0,323%)!

b. De maandelijks te betalen € 109 bestaat uit aflossing en interest. Samen zijn ze constant, dus het betreft hier een annuïteitenlening.

c. $CW = T \cdot a_{n\neg p} = 109 \cdot \dfrac{1-1{,}00323^{-240}}{0{,}00323} = 18.183$. Conclusie: men krijgt meer dan waar men financieelrekenkundig recht op heeft.

4.29 a. Er mist een zin in de opgave: ‘De jaarrente is 3,9%’.
Dan is dit een voorbeeld van een oneindige lening: de looptijd staat blijkbaar niet vast.

b. Rentevoet per maand is 64/20.000 = 0,0032, dus rentefactor per jaar is $1{,}0032^{12}$ = 1,03908, dus rente is (ongeveer) 3,9% per jaar. Klopt dus.

4.30 a. CW interestdelen is $= 56.000 \cdot \dfrac{1-1{,}07^{-10}}{0{,}07}$ = 393.320,57

b. CW aflossing is $800.000 \cdot 1{,}07^{-10}$ = 406.679,43

c. De optelling van de antwoorden van a en b is samen de lening zelf: € 800.000.

4.31 Noteer de 11^e aflossing als a_{11}, het 11^e interestdeel als r_{11} en de restschuld als R_{11}. In onderstaande tabel staan de antwoorden.

Type	a_{11}	r_{11}	R_{11}
Lineaire lening	12.500	5.875	112.500
Ineens aflosbare lening	0	11.750	250.000
Annuïteitenlening	12.353	7.201	140.859

Toelichting:
Lineair:
Aflossing is telkens 250.000/20 = 12.500, R_{11}= 250.000 − 11·12.500 = 112.500
R_{10} = 125.000, dus r_{11} = 125.000·0,047 = 5875

Ineens aflosbaar:
Aflossingen t/m 19 zijn 0; rente is steeds maximaal, dus ook r_{11} = 250.000·0,047 = 11.750
R_{11} is nog steeds 250.000.

Annuitair:
Ann= 250.000·0,047/(1 − $1{,}047^{-20}$) = 19.553,54
r_1 = 11.750, dus a_1 = 19.553,54 − 11.750 = 7803,54
Dus a_{11} = a1·$1{,}047^{10}$ = 12.353 (bij annuïteiten volgende aflossingen een meetkundige rij);
r_{11}=Ann − a_{11} = 7201
R_{11}= CW van de 9 nog te betalen ann. = 19.553,54/(1 − $1{,}047^{-9}$)/0,047 = 140.859.

4.32 a. (I) oorspronkelijke schuld = 18 · 125.000 = € 2.250.000
(II) oorspronkelijke schuld = 193.000 · [1 – $1{,}071^{-15}$] / 0,071 = € 1.746.778
b. (I) schuldrest per 6 sept. a.s.: 2.250.000 – 7 · 125.000 = 1.375.000; betaling dus 0,053 1.375.000 + 125.000 = 197.875
(II) betaling per 6 sept. is 193.000 (!)
Totaal aan betalingen per 6/9/02 zal dus zijn: € 390.875
c. Schuldrest, incl. dan te betalen annuïteit, excl. extra betaling, per 6 sept. zal zijn:
193.000 · [1 – $1{,}071^{-7}$] / 0,071 = 1.036.516
Verminder dit bedrag met de genoemde 193.000, dit geeft de nieuwe schuld: 843.516
stel nieuwe annuïteit = T; nu moet gelden T · [1 – $1{,}071^{-7}$] / 0,071 = 843.516
T = 843.516 · 0,071 / [1 – $1{,}071^{-7}$] = 321.641 = € 157.063

Gemengde opgaven

4.33 a. Annuïteit is €149.029,49; eerste aflossing is € 69.029,49.
b. Ja, PMT(0,08;10;-1000000).
c. 595.031 (= Ann·a_{5-8})
d. RATE(120;-12.419,12;1000000;0;1) = 0,7255% per maand, ofwel 9,06% per jaar.

4.34 a. Zet in A1 t/m A8 de investering (-10 miljoen) en de 7 kasstromen. Typ dan in Excel =NPV(0,065;A2:A8)+A1. Antwoord: € 477.253,46.
b. =IRR(A1:A8) = 0,0761, dus 7,61%.
c. De vergelijking in onderdeel b is een 7^e^graads vergelijking: zie pagina 159.
d. Ja, want het leningspercentage (6,5%) is kleiner dan IR (7,61%).

4.35 a. Benodigd bedrag = 18.000 · (1 + 1/1,06 + 1/1,06^2 + 1/1,06^3 + 1/1,06^4)
= 18.000 · 1,06 · (1 – 1,06^{-5})/0,06 = 80.372 dus € 80.400
b. Stel het jaarlijks in te leggen bedrag T; er moet dan gelden: T · 1,07 · (1,07^{30} – 1)/0,07 = 80.400 geeft T = 795,46. De jaarlijkse termijnen zullen dus circa € 795 bedragen.

4.36 a. De schuldrest = 78.625 · (1 – 1,079^{-8})/0,079 = 453.549 euro.
b. De voorlaatste schuldrest bedraagt 78.625/1,079 = 72.868,40; het interestbestanddeel van de laatste annuïteit bedraagt 72.868,40 · 0,079 = 5756,6; het aflossingsbestanddeel van de laatste annuïteit bedraagt dan 78.625 – 5756,6 ofwel circa 72.868 euro.
c. De nieuwe annuïteit zal zijn: ann · (1 – 1,063^{-8})/0,063 = 453.549 dus 73.907; het verschil met de oude annuïteit bedraagt nominaal 78.625 – 73.907 ofwel 4.718 per jaar; als we deze bedragen contant maken tegen 6,3% (het heersende rentepercentage) levert dit: 28.953 euro. De investering (boete) van 15.000 euro is dus de moeite waard, het levert een contant voordeel op van € 13.953; het is dus interessant om tot omzetting over te gaan.

4.37 a. 4,9% per jaar betekent groeifactor 1,049 per jaar en groeifactor 1,049$^{1/12}$ per maand ofwel 0,4% per maand; eindsaldo is dan (met de aanname prenumerando) 50·1,004·(1,004^{120} – 1) / 0,004 = 7.712 euro; aardig in overeenstemming met advertentiegegevens. NB: met postnumerando volgt: €7682.
b. =NPER(0,049;-600;0;10000;1) = 12,04. Of: 600 × 1,049 × (1,049^n – 1) / 0,049 = 10.000 geeft n = 12,04; er zijn dus ten minste 13 jaarlijkse termijnen van € 600,- nodig.

4.38 a. CW = 85.000 · ((1 – 1,052^{-8}) / 0,052) = 544.959 euro
b. Het rentebestanddeel van de eerstvolgende annuïteit bedraagt 5,2% van 544.959 ofwel 28.338 euro; het aflossingsbestanddeel bedraagt dus 85.000 – 28.338 ofwel 56.662 euro.
c. Aflossingsschema:

jaar	Interest	Aflossing	Interest+afl.	Schuldrest
1	12.000	48.000	60.000	192.000
2	9.600	48.000	57.600	144.000
3	7.200	48.000	55.200	96.000
4	4.800	48.000	52.800	48.000
5	2.400	48.000	50.400	0

d. Uitstaande schuld = 8.250 / 0,055 = 150.000 euro.

4.39 a. 1,00581^{12} = 1,07199 dus 7,2% per jaar.
b. Interestbetaling (‘rente’) en aflossing (hier: € 319,55 interestbetaling en € 230,45 aflossing).
c. $55.000 = 550 \cdot a_{\overline{n|}0,581} = 550 \cdot \dfrac{1-1{,}00581^{-n}}{0{,}00581}$
d. Vul 150 in de vergelijking uit c in: CW is dan € 54.964,04, iets minder dan € 55.000.

Vul 151 in: antwoord is € 55.193,36, iets meer dan € 55.000
(Of: vergelijking in onderdeel c wordt uiteindelijk: $1{,}00581^{-n} = 0{,}419$ dus n = - log 0,419 / log 1,00581 = 150,16.

e. NPER(0,00581; -550; 55.000) = 150,16

4.40 a. Zie tijdlijn hieronder.

399	30	30	30	30	…		30	30	30
1	2	3	4		…	14	15	16	

b. Annuïteitenlening

c. $399 = 30 \cdot a_{\overline{16|}p}$, dus $399 = 30 \cdot \dfrac{1-(1+r)^{-16}}{r}$

d. RATE(16;30;-399) = 0,0226; $1{,}0226^{12} = 1{,}3076$ dus 30,8% per jaar (!).

e. Kredietvergoeding is 16 × 30 – 399 = 81 euro.

4.41 Eindkapitaal bij 4%: $25 \cdot \dfrac{(1{,}04^{1/12})^{240}-1}{1{,}04^{1/12}-1} = 9.096{,}04$ euro.

Eindkapitaal bij 0%: 20·12·25 = 6.000 euro.

Eindkapitaal bij -4%: $25 \cdot \dfrac{(0{,}96^{1/12})^{240}-1}{0{,}96^{1/12}-1} = 4.107{,}69$ euro.

4.42 a. Enkelvoudige interestvergoeding, want het gemiddelde is berekend door de 10 jaarrentes op te tellen en door 10 te delen (!).

b. Bij samengestelde interest zou de gemiddelde groeifactor zijn geweest:
$\sqrt[10]{1{,}0115 \cdot 1{,}0125 \cdot 1{,}0135 \cdot \ldots \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}05} = \sqrt[10]{1{,}2791...} = 1{,}0249$, dus een gemiddelde jaarinterest van 2,49%.

c. Enkelvoudig: 10.000 + 10·250 = 12.500;
samengesteld: 10.000·1,0115·1,0125·1,0135·...·1,05 = 10.000·1,2791 = 12.791,29